ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. А. ЦУПАК, А. Н. ЦУПАК

ЛЕКЦИИ ПО АЛГЕБРЕ

I семестр

- КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА
- МАТРИЦЫ И ДЕТЕРМИНАНТЫ
- ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ
- СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ

Учебное пособие

ПЕНЗА ИИЦ ПГУ 2008

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143
Ц 86

Рецензенты:

доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук,
заведующий кафедрой математики Пензенской государственной
технологической академии
С. Н. Дорофеев;

кандидат физико-математических наук, заведующая кафедрой
естественнонаучных дисциплин
Российского государственного университета
инновационных технологий и предпринимательства
С. Я. Нагаева

Цупак, А. А.

Ц 86 **Лекции по алгебре. I семестр. Комплексные числа. Матрицы и детерминанты. Линейные системы. Собственные векторы** : учебное пособие / А. А. Цупак, А. Н. Цупак. — Пенза : Издательский центр ПензГУ, 2008. — 120 с.

ISBN 978-5-94170-230-5

В книге представлен текст лекций по первой части курса «Алгебра», читаемого студентам первокурсникам естественнонаучного факультета Пензенского государственного университета.

Первая часть курса охватывает темы: «Алгебраические структуры», «Математическая индукция», «Комплексные числа», «Матрицы и действия над ними», «Системы линейных алгебраических уравнений», «Метод элементарных преобразований», «Обращение матриц», «Полная проблема собственных значений».

В основу теории матриц и определителей положен метод элементарных преобразований.

Книга может быть полезна всем студентам естественнонаучного факультета, изучающим Математику.

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143

ISBN 978-5-94170-230-5

Содержание

Предисловие

Открытая читателем книжечка представляет текст лекций по первой части курса «Алгебра», читаемого студентам-математикам первого курса естественнонаучного факультета Пензенского государственного университета.

Слушатели курса — это бывшие школьники, которые

- уже владеют некоторыми знаниями по Математике;
- еще не привыкли к восприятию достаточно абстрактных математических теорий и лаконичных математических текстов;
- должны постепенно привыкать к абстрактной и лаконичной подаче математического материала;
- не должны болезненно переносить переход от школьной Математики к математической Науке.

Перечисленными тезисами и руководствовались авторы, составляя лекции по алгебре для первокурсников, читая эти лекции, проводя практические занятия, экзаменуя студенов-математиков в первую для них сессию.

Содержание первой части курса отражено в достаточно подробном оглавлении.

Оглавление является еще и программой экзамена.

Темы курса занумерованы арабскими цифрами без внутренних точек; экзаменационные вопросы занумерованы арабскими цифрами с одной внутренней точкой; мелкая рубрикация (арабские цифры с двумя внутренними точками) служит для более убедительного структурирования излагаемого материала и для ориентации экзаменующихся при подготовке ответов на экзаменационные вопросы.

Тема «Алгебраические структуры» не входит в экзаменационные билеты, хотя и входит в программу экзамена. Материал этой темы носит для первокурсников справочный характер и изучается студентами в течение всего года по мере появления различных алгебраических структур в основном лекционном курсе.

Работа над текстом учебного пособия была распределена между обоими авторами и выполнена ими поровну: А. А. Цупак — темы 1, 2, 7, 8, 9; А. Н. Цупак — темы 3, 4, 5, 6.

Оба автора в равной мере несут ответственность перед читателями за все методические промахи, невольные ошибки и незамеченные опечатки.

Математические — научные и методические — вкусы авторов складывались и сложились под влиянием нескольких, почти равнозначных факторов, перечислить которые авторы считают своей приятной обязанностью:

- учеба в университете и в аспирантуре;
- стажировки в лучших университетах России;
- беседы с мудрыми профессорами и с талантливыми коллегами, разговоры с любознательными студентами;
- чтение классических университетских учебников по различным математическим дисциплинам, изучение монографий по специальности.

От положительного и отрицательного влияния прочтенных математических книг почти невозможно избавиться.

Большие куски математического текста, порожденные движением собственной мысли, на печати оказываются видоизмененными цитатами из пыльных конспектов и из любимых книг.

Это еще один повод с благодарностью вспомнить тех, которые указали нам Путь, и тех, кого мы встретили на этом Пути.

1 Основные алгебраические структуры

1.1 Алгебраические структуры с одной операцией

1.1.1 Определение коммутативной группы

Коммутативная группа — это некоторое множество M с бинарной (двуместной) операцией $\circ$, которая удовлетворяет следующим условиям (аксиомам):

- Ассоциативность групповой операции:

$$A_1) \qquad (\forall x, y, z \in M) \quad (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)\,.$$

- Существование нейтрального (единичного, нулевого) элемента:

$$A_2) \qquad (\exists e \in M)(\forall x \in M) \quad x \circ e = e \circ x = x\,.$$

- Обратимость каждого элемента:

$$A_3) \qquad (\forall x \in M)(\exists x^{-1} \in M) \quad x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e\,.$$

- Коммутативность групповой операции:

$$A_4) \qquad (\forall x, y \in M) \quad x \circ y = y \circ x\,.$$

Фиксированная коммутативная группа обозначается так:

$$G = (M; \circ, e)\,.$$

Про множество M говорят, что оно несет на себе структуру коммутативной группы, или говорят, что множество M является носителем группы G. Очень часто (когда это не приводит к недоразумениям) группу и носитель группы обозначают одной и той же буквой (например, G).

При изучении курса алгебры и вообще математики в целом мы столкнемся с примерами различных коммутативных групп, которые еще называются абелевыми группами, по имени гениального норвежского математика Нильса Хенрика Абеля (* 5.8.1802, † 6.4.1829).

Если в некоторой конкретной коммутативной группе операция обозначается знаком $\cdot$, то операция называется умножением, а группа называется мультипликативно записанной или просто мультипликативной.

Если в некоторой конкретной коммутативной группе операция обозначается знаком $+$, то операция называется сложением, а группа называется аддитивно записанной или просто аддитивной.

Далее в очень лаконичной форме даются определения группы, моноида, полугруппы путем обеднения аксиоматики коммутативной группы.

1.1.2 Коммутативная группа

A_1) A_2) A_3) A_4).

1.1.3 Группа

A_1) A_2) A_3).

1.1.4 Моноид

A_1) A_2).

1.1.5 Полугруппа

A_1).

1.1.6 Подгруппа

Пусть даны некоторая группа $G = (M; \circ, e)$ и некоторое непустое подмножество ее носителя $M' \subseteq M$, пусть подмножество M' замкнуто относительно групповой операции, т.е.

$$\forall\, x, y \in M' \quad x \circ y \in M',$$

и замкнуто относительно обращения, т.е.

$$\forall\, x \in M' \quad x^{-1} \in M',$$

тогда тройка $G' = (M'; \circ, e)$ вновь является группой и называется подгруппой группы G.

Обозначается подгруппа так: $G' \sqsubseteq G$; или так: $G' \trianglelefteq G$. Мы будем предпочитать первый способ обозначения.

Если $M' \neq M \quad (M' \subset M)$, то подгруппа называется собственной, и применяется понятное обозначение $G' \sqsubset G$ или $G' \triangleleft G$. Мы будем предпочитать первый способ обозначения.

Достаточно подробно теория групп изучается студентами-старшекурсниками в специальном курсе, посвященном теории алгебраических структур и ее приложениям в геометрии.

1.2 Алгебраические структуры с двумя операциями

1.2.1 Определение поля

Поле — это множество M с двумя бинарными операциями $+$ и $\cdot$, называемыми сложением и умножением, которые удовлетворяют следующим условиям (аксиомам):

- Ассоциативность сложения:

  $A_1^+)$ $\quad (\forall x, y, z \in M) \quad (x+y)+z = x+(y+z)\,.$

- Существование нулевого по сложению элемента:

  $A_2^+)$ $\quad (\exists 0 \in M)(\forall x \in M) \quad x+0 = 0+x = x\,.$

- Существование для каждого элемента противоположного:

  $A_3^+)$ $\quad (\forall x \in M)(\exists (-x) \in M) \quad x+(-x) = -x+x = 0\,.$

- Коммутативность операции сложения:

  $A_4^+)$ $\quad (\forall x, y \in M) \quad x+y = y+x\,.$

- Ассоциативность умножения:

  $A_1^\cdot)$ $\quad (\forall x, y, z \in M) \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)\,.$

- Существование единичного по умножению элемента:

  $A_2^\cdot)$ $\quad (\exists\, 1 \in M)(\forall x \in M) \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x\,.$

- Существование для каждого ненулевого элемента обратного:

  $A_3^\cdot)$ $\quad (\forall x \in M \setminus \{0\})(\exists x^{-1} \in M) \quad x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1\,.$

- Коммутативность операции умножения:

  $A_4^\cdot)$ $\quad (\forall x, y \in M) \quad x \cdot y = y \cdot x\,.$

- Дистрибутивность умножения относительно сложения

  $A_5)$ $\quad (\forall x, y, z \in M) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x+y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z) \\ z \cdot (x+y) = (z \cdot x) + (z \cdot y) \end{array} \right. .$

Фиксированное поле будем обозначать так:

$$\mathbb{F} = (M; +, 0;\ \cdot\ , 1)\,.$$

Про множество M говорят, что оно несет на себе структуру поля. Очень часто (когда это не приводит к недоразумениям) поле и носитель поля обозначают одной и той же буквой (например, $\mathbb{F}$).

Далее в очень лаконичной форме даются определения тела и колец путем сравнения их аксиоматики с аксиоматикой поля. Аксиоматика тела и колец получается обеднением аксиоматики поля, и поэтому понятие поля имеет ме́ньший объем при бо́льшем содержании.

1.2.2 Поле

$$A_1^+ \quad A_2^+ \quad A_3^+ \quad A_4^+ \qquad A_1^{\cdot} \quad A_2^{\cdot} \quad A_3^{\cdot} \quad A_4^{\cdot} \qquad A_5\,.$$

1.2.3 Тело

$$A_1^+ \quad A_2^+ \quad A_3^+ \quad A_4^+ \qquad A_1^{\cdot} \quad A_2^{\cdot} \quad A_3^{\cdot} \qquad\qquad A_5\,.$$

1.2.4 Коммутативное кольцо с единицей

$$A_1^+ \quad A_2^+ \quad A_3^+ \quad A_4^+ \qquad A_1^{\cdot} \quad A_2^{\cdot} \qquad\qquad A_4^{\cdot} \qquad A_5\,.$$

1.2.5 Коммутативное кольцо

$$A_1^+ \quad A_2^+ \quad A_3^+ \quad A_4^+ \qquad A_1^{\cdot} \qquad\qquad\qquad A_4^{\cdot} \qquad A_5\,.$$

1.2.6 Кольцо с единицей

$$A_1^+ \quad A_2^+ \quad A_3^+ \quad A_4^+ \qquad A_1^{\cdot} \quad A_2^{\cdot} \qquad\qquad\qquad A_5\,.$$

1.2.7 Кольцо

$$A_1^+ \quad A_2^+ \quad A_3^+ \quad A_4^+ \qquad A_1^{\cdot} \qquad\qquad\qquad\qquad A_5\,.$$

2 Математическая индукция

2.1 Принцип математической индукции

2.1.1 Замечание по обозначению

Через $\mathcal{P}(n)$ будем обозначать предикаты, т.е. математические предложения, истинность которых зависит от натурального параметра n.

В арифметике это сравнения (равенства и неравенства), содержащие параметр n. Например:

$$\begin{array}{ll} (n+1)^2 = n^2+2n+1, & \text{истинно при } n = 1,2,3,4,5,\dots; \\ (n+5)^2 > n^3, & \text{истинно при } n = 1,2,3,4; \\ (n+5)^2 < n^3, & \text{истинно при } n = 5,6,7,8,9,\dots; \\ (n+1)^2 \neq n^2+1, & \text{истинно при } n = 1,2,3,4,5,\dots \end{array}$$

В алгебре это могут быть предложения (и сравнения в том числе), содержащие квадратные матрицы n-го порядка. Например:

- В матрице порядка n число элементов больше нуля.
  Истинно при $n = 1, 2, 3, \dots$
- В матрице порядка n число элементов четно.
  Истинно при $n = 2, 4, 6, 8, \dots$
- В матрице порядка n число элементов меньше 40.
  Истинно при $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

2.1.2 Формулировка принципа математической индукции

Формально:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}(1) \\ \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \end{array} \right. \qquad \vdash \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}(n).$$

Словами: пусть некоторый предикат (истинность которого зависит от натурального аргумента) $\mathcal{P}(n)$ истинен при $n = 1$, и пусть для каждого натурального числа n из истинности предиката для аргумента n следует его истинность для следующего натурального аргумента $(n+1)$, тогда предикат истинен для **всех** натуральных значений аргумента.

2.1.3 Применение принципа математической индукции для доказательства математических теорем

Пусть требуется доказать, что $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}(n)$. Для этого достаточно:

1. Доказать, что истинно $\mathcal{P}(1)$. **Это база индукции**.

2. Доказать, что из предположения истинности $\mathcal{P}(n)$ для натурального аргумента n следует истинность $\mathcal{P}(n+1)$ для натурального аргумента $(n+1)$. **Это индукционный переход**.

Принцип математической индукции изложен. Но достаточно ли изложенного для уверенного применения принципа? Конечно, нет!

Решим несколько задач, тренируясь в технике практического применения принципа математической индукции.

Замечание. При практическом применении метода математической индукции мы будем часто выполнять ряд действий, которые называются «расширением базы индукции». Этим термином мы обозначаем доказательство частных случаев $\mathcal{P}(2), \mathcal{P}(3), \mathcal{P}(4)$. Эти доказательства не являются теоретически необходимыми, но они помогают подготовиться к доказательству индукционного перехода, который для начинающих может оказаться слишком сложным.

Кроме того, и в профессиональной математике при открытии и доказательстве новой теоремы (при выводе новой формулы) сначала возникают и рассматриваются частные случаи $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \mathcal{P}(3), \ldots, \mathcal{P}(n_0)$, затем формулируется гипотеза $\mathcal{P}(n)$ и, наконец, доказывается теорема $\forall n \quad \mathcal{P}(n)$.

2.1.4 Примеры доказательств арифметических формул методом математической индукции

Пример 1. Доказать, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Доказательство.

1. База индукции: $n=1$; $1 = \dfrac{1\cdot 2}{2}$.

2. Расширение базы индукции: $n=2$; $1+2 = \dfrac{2\cdot 3}{2}$.

3. Индукционный переход $n \to (n+1)$. Пусть для натурального аргумента n верно, что $1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, тогда
$1+2+3+\ldots+n+(n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$
$= \dfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Пример 2. Доказать, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Доказательство.

1. База индукции: $n=1$; $1^2 = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$.
2. Расширение базы индукции: $n=2$; $1^2+2^2 = \dfrac{2\cdot 3\cdot 5}{6}$.
3. Индукционный переход $n \to (n+1)$. Пусть для натурального аргумента n верно, что $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, тогда
$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$
$= \dfrac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$.

Пример 3. Доказать, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (1+2+3+\ldots+n)^2 = (1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3).$$

Доказательство.

1. База индукции: $n=1$; $(1)^2 = 1^3$.
2. Расширение базы индукции: $n=2$; $(1+2)^2 = (1^3+2^3)$.
3. Индукционный переход $n \to (n+1)$. Пусть для натурального аргумента n верно, что $(1+2+3+\ldots+n)^2 = (1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)$, тогда $(1+2+3+\ldots+n+(n+1))^2 =$
$= (1+2+3+\ldots+n)^2 + 2(1+2+3+\ldots+n)(n+1) + (n+1)^2 =$
$= (1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3) + 2\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)\cdot(n+1) + (n+1)^2 =$
$= (1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3) + n(n+1)^2 + (n+1)^2 =$
$= (1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3) + (n+1)^3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3$.

Пример 4. Доказать, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Доказательство.

1. База индукции: $n = 1$; $1^3 = \dfrac{1^2 \cdot 2^2}{4}$.
2. Расширение базы индукции: $n = 2$; $1^3 + 2^3 = \dfrac{2^2 \cdot 3^2}{4}$.
3. Индукционный переход $n \to (n+1)$. Пусть для натурального аргумента n верно, что $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, тогда
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 =$$
$$= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

Пример 5. Доказать, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Доказательство.

1. База индукции: $n = 1$; $\dfrac{1}{1 \cdot 2} = \dfrac{1}{2}$.
2. Расширение базы индукции: $n = 2$; $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} = \dfrac{2}{3}$.
3. Индукционный переход $n \to (n+1)$. Пусть для натурального аргумента n верно, что
$\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$, тогда
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$
$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} =$$
$$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Пример 6. Доказать, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}.$$

Доказательство.

1. База индукции: $n=1$; $\dfrac{1}{1\cdot 4}=\dfrac{1}{3\cdot 1+1}$.

2. Расширение базы индукции: $n=2$; $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}=\dfrac{2}{7}$.

3. Индукционный переход $n \to (n+1)$. Пусть для натурального аргумента n верно, что
$\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{n}{3n+1}$, тогда
$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\frac{n}{(3n+1)(3n+4)}=$$
$$=\frac{n}{3n+1}+\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{n(3n+4)+1}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{3n^2+4n+1}{(3n+1)(3n+4)}=$$
$$=\frac{(3n+1)(n+1)}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{n+1}{3n+4}.$$

Пример 7. Доказать, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1.$$

Доказательство.

1. База индукции: $n=1$; $1\cdot 1!=2!-1$.

2. Расширение базы индукции:
$n=2$; $1\cdot 1!+2\cdot 2!=3!-1$;
$n=3$; $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!=3!-1+3\cdot 3!=3!(3+1)-1=4!-1$.

3. Индукционный переход $n \to (n+1)$. Пусть для натурального аргумента n верно, что $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$,
тогда $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!+(n+1)(n+1)!=$
$=(n+1)!-1+(n+1)(n+1)!=(n+1)!(n+2)-1=(n+2)!-1$.

Пример 8. Доказать, что

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \&\ n \geq 2 \qquad \left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}.$$

Доказательство.

1. База индукции: $n=2$; $1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{2+1}{2\cdot 2}$.

2. Расширение базы индукции: $n=3$;
$\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{9}\right)=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{8}{9}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{3+1}{2\cdot n}$.

3. Индукционный переход $n \to (n+1)$. Пусть для натурального аргумента n верно, что
$\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{n+1}{2n}$, тогда
$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=$$
$$=\frac{n+1}{2n}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2(n+1)}.$$

Пример 9. Доказать, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}.$$

Доказательство.

1. База индукции: $n=1$; $1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

2. Расширение базы индукции: $n=2; 1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}$.

3. Индукционный переход $n \to (n+1)$. Пусть для натурального аргумента n верно, что
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n},$$
тогда, воспользовавшись тождеством
$$\frac{1}{2(n+1)-1}-\frac{1}{2(n+1)}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{n+1},$$
получим требуемое.

Пример 10. Доказать, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (6^{2n-1}+1) \text{ кратно } 7.$$

Доказательство.

1. База индукции: $n = 1$; $(6^1 + 1) = 7$.

2. Расширение базы индукции: $n = 2$; $(6^3 + 1) = 217 = 31 \cdot 7$.

3. Индукционный переход $n \to (n+1)$. Пусть для натурального аргумента n верно, что $(6^{2n-1}+1)$ кратно 7, тогда $(6^{2(n+1)-1}+1) = 6^{2n-1+2}+1 = 36 \cdot 6^{2n-1}+1 = 36 \cdot (6^{2n-1}+1) - 35$ кратно 7.

Пример 11. Доказать, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in (-1, +\infty) \qquad (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Доказательство.

1. База индукции: $n = 1$; $(1 + x) \geq 1 + x$.

2. Расширение базы индукции: $n = 2$; $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x$.

3. Индукционный переход $n \to (n+1)$. Пусть для натурального аргумента n верно, что $(1+x)^n \geq 1 + nx$, тогда
$$(1+x)^{(n+1)} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq$$
$$\geq 1 + (n+1)x.$$

Пример 12. Доказать, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (2n)! < 2^{2n}(n!)^2.$$

Доказательство.

1. База индукции: $n = 1$; $2! < 2^2$.

2. Расширение базы индукции: $n = 2$; $4! < 2^4 2^2$.

3. Индукционный переход $n \to (n+1)$. Пусть для натурального аргумента n верно, что $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$, тогда
$$(2(n+1))! = (2n)!(2n+1)(2n+2) <$$
$$< 2^{2n}(n!)^2(2n+2)(2n+2) =$$
$$= 2^{2n}(n!)^2 2^2(n+1)(n+1) = 2^{2n+2}((n+1)!)^2 =$$
$$= 2^{2(n+1)}((n+1)!)^2.$$

Пример 13. Доказать, что

$$\forall n \geq 2 \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}.$$

Доказательство.

1. База индукции: $n = 2$; $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$.

2. Индукционный переход $n \to (n+1)$. Пусть для натурального аргумента n верно, что

   $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$, тогда

   $$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1},$$

   т.к. $\sqrt{n(n+1)} + 1 > n+1$, т.к. $n(n+1) > n^2$.

Пример 14. Доказать, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in \mathbb{R} \ \& \ x \neq 0 \qquad \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin \dfrac{(n+1)x}{2} \cdot \sin \dfrac{nx}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}}.$$

Доказательство.

1. База индукции: $n = 1$; $\sin x = \dfrac{\sin \dfrac{2x}{2} \cdot \sin \dfrac{x}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}}$.

2. Расширение базы индукции: $n = 2$;

   $\sin x + \sin 2x =$

   $$= \frac{\sin x \cdot \sin \dfrac{x}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}} + \sin 2x = \frac{\sin x \cdot \sin \dfrac{x}{2} + 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \sin \dfrac{x}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}} =$$

   $$= \frac{\sin x \cdot (\sin \dfrac{x}{2} + 2 \sin \dfrac{x}{2} \cdot \cos x)}{\sin \dfrac{x}{2}} = \frac{\sin x \cdot (\sin \dfrac{x}{2} + \sin \dfrac{3x}{2} - \sin \dfrac{x}{2})}{\sin \dfrac{x}{2}} =$$

   $$= \frac{\sin \dfrac{3x}{2} \cdot \sin x}{\sin \dfrac{x}{2}} = \frac{\sin \dfrac{3x}{2} \cdot \sin \dfrac{2x}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}}.$$

3. Индукционный переход $n \to (n+1)$.
$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx + \sin(n+1)x =$
$$= \frac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2} \cdot \sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}} + \sin(n+1)x =$$
$$= \frac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2} \cdot \sin\dfrac{nx}{2} + \sin\dfrac{x}{2} \cdot \sin(n+1)x}{\sin\dfrac{x}{2}} =$$
$$= \frac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2} \cdot \left(\sin\dfrac{nx}{2} + 2\sin\dfrac{x}{2} \cdot \cos\dfrac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\dfrac{x}{2}} =$$
$$= \frac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2} \cdot \left(\sin\dfrac{nx}{2} + \sin\dfrac{(n+2)x}{2} - \sin\dfrac{nx}{2}\right)}{\sin\dfrac{x}{2}} =$$
$$= \frac{\sin\dfrac{(n+2)x}{2} \cdot \sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}.$$

2.1.5 Всегда ли нужно доказывать базу индукции?

Ответ на этот вопрос однозначен: **да, всегда!** Иначе можно получить неверное утверждение.

Контрпример. Доказать, что все натуральные числа больше 7; формально:
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n > 7.$$

Доказательство.

1. Базу индукции не доказали.

2. Индукционный переход:
   пусть верно $n > 7$, тогда $(n+1) > 7 + 1 > 7$.

По принципу математической индукции $\forall n \in \mathbb{N} \quad n > 7$, что, конечно, **не верно.**

3 Комплексные числа и основная теорема алгебры

История Математики — это история развития теории пространственных форм, история понятия числа (натуральные, положительные рациональные, целые, рациональные, вещественные) и история поиска и исследования «числоподобных объектов». (Последний закавыченный термин принадлежит в.р.м. И. Р. Шафаревичу [14] и представляется авторам весьма содержательным и идейно очень точным.)

Бывшим школьникам известны два числоподобных объекта: полиномы с вещественными коэффициентами (см. ниже) и геометрические векторы. Развиваемая в этой теме теория посвящена построению ближайшего обобщения вещественных чисел — комплексным числам.

3.1 Комплексные числа в алгебраической форме

3.1.1 Определение

Пусть $\mathbb{R}$, как всегда, есть поле вещественных чисел. Обозначим символом $\mathbb{R}[i]$ множество полиномов с коэффициентами из $\mathbb{R}$ и с присоединенным элементом $i \notin \mathbb{R}$, вместо которого никогда не подставляются вещественные числа, а который необходим только для создания полиномов как новых единых математических объектов. Таким образом,

$$p = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + \ldots + a_n i^n \text{ — элемент } \mathbb{R}[i]\ .$$

Элементы из $\mathbb{R}[i]$ (полиномы с вещественными коэффициентами) можно складывать, вычитать, перемножать. При этом операции сложения и умножения полиномов наследуют свойства аналогичных операций поля вещественных чисел $\mathbb{R}$:

операция сложения $+$

- ассоциативна;
- коммутативна;
- существует нейтральный элемент 0 ;
- для каждого полинома p существует противоположный полином $(-p)$, такой, что $p + (-p) = 0$;

операция умножения $\cdot$

- ассоциативна;
- коммутативна;
- существует нейтральный элемент 1;
- дистрибутивна: $(p_1 + p_2) \cdot p_3 = (p_1 \cdot p_3) + (p_1 \cdot p_3)$.

Но! При попытке деления двух полиномов чаще всего получается не полином, а дробная рациональная функция!

Что делать? Что можно придумать?

«Укоротим полиномы». Введем на $\mathbb{R}[i]$ отношение эквивалентности с помощью так называемого определяющего соотношения

$$i^2 = -1 \ ,$$

т.е. всякий полином $0+0i+1i^2$ будем «всегда и всюду» заменять биномом $-1+0i$; при этом

$$i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad , i^6 = -1, \quad i^7 = -1, \quad i^8 = 1, \quad i^9 = i$$

и т.д.

Новое множество (фактор-множество множества $\mathbb{R}[i]$ по введенному отношению эквивалентности) $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел, т.е. это множество двучленов вида $a_0 + a_1 i$ (или, что то же самое, $a_0 + i a_1$) со всеми «обычными» алгебраическими операциями над полиномами и с дополнительным соотношением $i^2 = -1$.

Комплексные числа (КЧ) будем записывать так:

$$z = x + iy, \quad c = a + ib, \quad w = u + iv,$$

или с индексами: $x_1 + iy_1, \quad a_3 + ib_3, \quad u_7 + iv_7,$
или конкретно: $4 + 5i, \quad 7.3 + 9.11i, \quad -3.28 - 4.737i.$

3.1.2 Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Сложение комплексных чисел в алгебраической форме.

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1.$$

Вычитание комплексных чисел в алгебраической форме.

$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2);$$

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2).$$

Нейтральный по сложению элемент. $0 + i0 =_{\text{(по обозн.)}} 0;$

$$(x + iy) + (0 + i0) = x + iy, \qquad\qquad z + 0 = z.$$

Противоположные комплексные числа.

$$(x + iy) + (-x + i(-y)) = 0 + i0, \qquad\qquad z + (-z) = 0.$$

Умножение комплексных чисел в алгебраической форме.

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 =$$

$$= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1),$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1.$$

Нейтральный по умножению элемент. $(1 + i0) =_{\text{(по обозн.)}} 1;$

$$(x_1 + iy_1) \cdot (1 + i0) = x_1 + iy_1, \qquad\qquad z_1 \cdot 1 = z_1.$$

3.1.3 Сопряженные числа и модуль комплексного числа

Сопряженным числом к произвольному комплексному числу $z = x + iy$ называется комплексное число $\overline{z} = \overline{x + iy} = x - iy$.

$$\overline{\overline{z}} = z; \qquad z + \overline{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x \in \mathbb{R}; \qquad z\overline{z} = x^2 + y^2 \geq 0.$$

Модуль комплексного числа.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0, \qquad\qquad |z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0.$$

Пример. Если $z = 3 + 4i$, то $\overline{z} = 3 - 4i$;

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Связь модуля с сопряжением.

$$|z|^2 = z\overline{z}, \qquad\qquad |z| = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Связь операций сложения и умножения с сопряжением.

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

Действительно,
$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1),$
$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (x_1 - iy_1) \cdot (x_2 - iy_2) = \ldots\ \ldots = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1).$

Если $z = \overline{z}$, то $z = x \in \mathbb{R}$.

Вещественная и мнимая части комплексного числа.

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(x + iy) = x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(x + iy) = y \in \mathbb{R}.$$

$$z = \operatorname{Re} z + i \cdot \operatorname{Im} z$$

3.1.4 Деление комплексных чисел в алгебраической форме

$$\frac{x + iy}{a + ib} = \frac{(x + iy)(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{(xa + yb) + i(ya - xb)}{(a^2 + b^2)} = \frac{xa + yb}{a^2 + b^2} + i\frac{ya - xb}{a^2 + b^2}.$$

Перед нами вновь комплексное число.

Если возникает сомнение, действительно ли введенная операция является обратной для операции умножения, можно провести простую выкладку:

$$\frac{x + iy}{a + ib}\cdot(a+ib) = \left(\frac{xa + yb}{a^2 + b^2} + i\frac{ya - xb}{a^2 + b^2}\right)(a+ib) = \left(\frac{xa + yb}{a^2 + b^2}a - \frac{ya - xb}{a^2 + b^2}b\right) + i\left(\frac{xa + yb}{a^2 + b^2}b + \frac{ya - xb}{a^2 + b^2}a\right) = \frac{x(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} + i\frac{y(b^2 + a^2)}{a^2 + b^2} = x + iy\,.$$

Деление возможно на любое ненулевое комплексное число.

Сопряжение частного. Оно равно частному сопряжений:

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2},$$

действительно,

$$\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} = \frac{x - iy}{a - ib} = \frac{(x - iy)(a + ib)}{a^2 + b^2} = \frac{xa + yb}{a^2 + b^2} - i\frac{ya - xb}{a^2 + b^2} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}\,.$$

3.2 Развитые формы комплексного числа

3.2.1 Комплексные числа в теоретико-множественной форме

Каждое комплексное число $z = x + iy$ однозначно определяется парой вещественных чисел $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, т.е. с теоретико-множественной точки зрения $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Но на $\mathbb{C}$ определены еще операции $+, \cdot$, превращающие множество $\mathbb{C}$ в алгебраическое поле.

В теоретико-множественной форме сложение и умножение выполняются по следующим формулам:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Противоположное к (x, y) число — это $(-x, -y)$.

Нейтральный по сложению элемент $(0, 0) = 0$.

Нейтральный по умножению элемент $(1, 0) = 1$.

Так называемая мнимая единица $i = (0, 1)$.

Всякое комплексное число единственным образом разложимо в базисе {1,i} над полем вещественных чисел:

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x1 + yi = x + iy.$$

3.2.2 Комплексные числа в геометрической форме

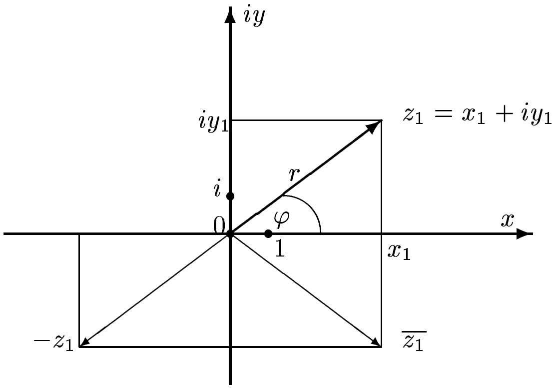

Рис. 3.2.1

Комплексные числа изображаются точками (аффиксами комплексных чисел) или геометрическими векторами на евклидовой плоскости Π_2, оснащенной ортонормированной системой координат (см. рис. 3.2.1).

Если комплексные числа z_1, z_2 изображаются векторами $\vec{\alpha}_1$, $\vec{\alpha}_2$, то сумма чисел $(z_1 + z_2)$ изображается суммой векторов $(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2)$.

Если $\lambda \in \mathbb{R}$, то комплексное число $\lambda \cdot z_1$ изображается вектором $\lambda\vec{\alpha}_1$.

Кроме того, имеет место важнейшее равенство модулей: $|z_1| = |\vec{\alpha}_1|$.

3.2.3 Комплексные числа в тригонометрической форме

Комплексное число $z = x + iy$ в геометрической форме однозначно определяется углом φ и длиной изображающего вектора $r = |\vec{\alpha}| = |z|$; при этом, конечно,

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi, \qquad r = |z|; \end{cases}$$

$z = (x + iy) = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — комплексное число в тригонометрической форме; $r = |z|$ — модуль комплексного числа; $\varphi = \arg z$ — аргумент комплексного числа, определяемый с точностью до слагаемого $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Обычно полагают $\arg z \in [0, 2\pi)$ или $\arg z \in (-\pi, \pi]$.

Умножение и деление в тригонометрической форме. Пусть два комплексных числа заданы в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

тогда их произведение

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) = \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \text{ т.е.} \end{aligned}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \text{ (с точностью до } 2\pi k).$$

Деление комплексных чисел в тригонометрической форме происходит аналогично умножению, но с противоположными действиями:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

т.е.

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 \ (\text{с точностью до } 2\pi k).$$

Возведение комплексных чисел в целую степень. Получается по правилам, обобщающим правила умножения и деления.

Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, $\quad n \in \mathbb{Z}$.

Понятно, что

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi);$$

это есть так называемая формула Муавра. Эта формула вместе с формулой бинома Ньютона эффектно применяется для вывода формул косинуса и синуса кратных аргументов.

3.2.4 Комплексные числа в показательной форме и действия над ними

Вводится компактное обозначение:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi) = e^{i\varphi}.$$

Но насколько оно оправдано? Следующие свойства комплексной экспоненты повторяют соответствующие свойства вещественной показательной функции:

$$e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + i0 = 1,$$
$$e^{i\varphi + i\psi} = e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi},$$
$$\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}.$$

Но появляется и новое свойство: **периодичность комплексной экспоненты с чисто мнимым периодом** $i2\pi$. Действительно,

$$e^{i\varphi + i2\pi} = e^{i(\varphi + 2\pi)} = \cos(\varphi + 2\pi) + i\sin(\varphi + 2\pi) = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) = e^{i\varphi}.$$

Простые примеры:

1. $4e^{i\pi/6} \cdot 3e^{i\pi/3} = 12e^{i\pi/2} = 12i$.
2. $7e^{i17^o} \cdot 2e^{i43^o} = 14e^{i60^o} = 7 + i7\sqrt{3}$.
3. $\dfrac{21e^{i\pi/3}}{7e^{i2\pi/5}} = 3e^{-i\pi/15} = 3e^{-i12^o}$.

А вот одна из красивейших формул элементарной математики:

$$e^{i\,\pi} = -1.$$

3.3 Корень n-й степени из комплексного числа

3.3.1 Извлечение корня n-й степени из комплексного числа

Попытаемся ввести операцию извлечения корня из комплексного числа, исходя из эквивалентности двух выражений:

$$w = \sqrt[n]{z} \quad \text{эквивалентно} \quad z = w^n. \qquad (*)$$

Отметим отличие постановки задачи извлечения корня из комплексного числа от задачи нахождения арифметического корня из вещественного числа.

Запишем числа z, w в показательной форме

$$z = re^{i\varphi}, \quad w = \rho e^{i\psi}$$

и приравняем друг другу число и степень

$$re^{i\varphi} = \left(\rho e^{i\psi}\right)^n = \rho^n e^{in\psi},$$

перейдем от одного комплексного соотношения к двум вещественным с учетом периодичности экспоненты:

$$\begin{cases} r = \rho^n, \\ \varphi + 2\pi k = n\psi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Разрешим эту систему относительно ρ, ψ:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \text{ — арифметический корень из неотрицательного числа}, \\ \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Используя периодичность экспоненты, несколько упростим последнее соотношение:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r}, \\ \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k, \quad k \in \{0, 1, \ldots, (n-1)\}. \end{cases}$$

Все вышеизложенное можно теперь записать в виде потока комплексных преобразований:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{re^{i(\varphi+2\pi k)}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)},$$

$$k \in \{0, 1, \ldots, (n-1)\}.$$

Геометрическая интерпретация. Если все эти значения корня изобразить на комплексной плоскости, то они все будут лежать на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$ и будут делить окружность на n равных частей, а одна из точек деления будет иметь аргумент $\frac{\varphi}{n}$.

Теоретически важный пример. Найдем все значения корня n-й степени из единицы:

$$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{e^{i0}} = \sqrt[n]{e^{i2\pi k}} = 1 \cdot e^{i\frac{2\pi k}{n}} = e^{i\frac{2\pi}{n}k},$$

$$k \in \{0, 1, \ldots, (n-1)\}.$$

Пример. Вычислить корень 4-й степени из комплексного числа, заданного в показательной форме. Аргумент задан в градусах, что часто используется в приложениях.

$$\sqrt[4]{81e^{i72^\circ}} = \sqrt[4]{81e^{i72^\circ + k360^\circ}} = \sqrt[4]{81}e^{i\frac{72^\circ + k360^\circ}{4}} = 3e^{i(18^\circ + k90^\circ)},$$

$$k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

3.3.2 Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$

Для комплексных чисел выполнены все аксиомы поля. Поле комплексных чисел обозначают, как и множество комплексных чисел: $\mathbb{C}$.

Числа вида $(x + i0)$ образуют подполе изоморфное полю $\mathbb{R}$, так что

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

3.4 Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел

3.4.1 Основная теорема алгебры (ОТА)

Теорема. Каждый полином ненулевой степени с комплексными (вещественными, рациональными) коэффициентами имеет (хоты бы один) комплексный корень.

Замечание. Можно провести доказательство, рассматривая полином степени n $P(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n \quad (c_n \neq 0)$ как функцию комплексного переменного $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, и, не ограничивая общности, можно считать, что $c_n = 1, \quad c_0 \neq 0$, т.е. $P(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + z^n \quad (c_0 \neq 0)$.

3.4.2 Кинематическая интерпретация степенной функции

Если рассматривать степенную функцию $z \longrightarrow z^n, \quad re^{i\varphi} \longrightarrow r^n e^{in\varphi}$ кинематически, то будет понятно, что за один оборот аффикса аргумента по окружности радиуса r аффикс значений функции сделает n оборотов по окружности радиуса r^n. Если же рассмотреть целую рациональную функцию $z \longrightarrow P(z)$, то аффикс значений функции опишет некую замкнутую кривую. Вопрос о том, как расположена эта кривая на комплексной плоскости, составляет ядро доказательства ОТА, схема которого и рассматривается далее.

3.4.3 Схема доказательства ОТА

Если выбирать r достаточно бо́льшим:

$$r > 2n \cdot \max\{1, |c_0|, |c_1|, \ldots, |c_{n-1}|,\}, \quad r > 2n \geq 2,$$

то слагаемое z^n будет доминировать над всеми остальными, т.к. модуль уклонения полинома от старшей степени удовлетворяет неравенству $|P(z) - z^n| = |c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_{n-1} z^{n-1}| <$

$$< \frac{r}{2n} + \frac{r}{2n} \cdot r + \frac{r}{2n} \cdot r^2 + \ldots + \frac{r}{2n} r^{n-1} \leq n \cdot \frac{r^n}{2n} = \frac{r^n}{2}, \text{ т.е.}$$

$$|z^n - P(z)| < \frac{r^n}{2}.$$

Таким образом, вся замкнутая кривая лежит в круговом кольце

$$\tfrac{1}{2} r^n < |w| < \tfrac{3}{2} r^n$$

и охватывает начало координат хотя бы один раз.

Если контур аффикса аргумента непрерывно стягивать в начало координат (z стремится к нулю), то контур аффикса значений функции непрерывно стягивается в точку $c_0 \neq 0$ и при таком стягивании пересечет начало координат, но это и означает, что для некоторого значения аргумента z_0 $P(z_0) = 0$.

В курсе ТФКП будет получено абсолютно строгое доказательство ОТА как следствие теоремы Лиувилля *(если ФКП голоморфна во всей комплексной плоскости и ограничена, то она есть тождественная константа)*.

Имея в виду именно ОТА, говорят: поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто; а это в точности и означает, что всякий полином с коэффициентами из $\mathbb{C}$ имеет корень (и, следовательно, нет необходимости придумывать новые числа при решении полиномиальных уравнений с коэффициентами из поля $\mathbb{C}$).

4 Матрицы и действия над ними

4.1 Матрицы и матричные операции (действия над матрицами)

4.1.1 Определение

Матрицей над полем $\mathbb{F}$ $(\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{C})$ называется дважды занумерованная совокупность чисел из поля $\mathbb{F}$ (функция $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{F}$):

$$(a_{ij}) \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, m; \\ j = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

Первый номер в этой нумерации называют номером строки, второй называют номером столбца.

Такая терминология связана с тем, что матрицу принято записывать в виде таблицы

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots & \ldots. \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

которая также называется матрицей (отсюда, собственно, и пошло название) и в которой каждый элемент с двойным номером (i, j) располагается в i-й строке j-го столбца.

Про матрицу, имеющую m строк и n столбцов, говорят, что она имеет размер $m \times n$ (m на n).

В конкретно заданных матрицах двойные номера элементов не указываются: они очевидны.

Например, в числовой матрице

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 5 \\ 4 & 11 & 7 & -3 \\ 8 & 9 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

число 7 располагается во второй строке третьего столбца и поэтому имеет двойной номер $(2, 3)$. Число 8 имеет двойной номер $(3, 1)$ и поэтому располагается в третьей строке первого столбца.

Матрицы обозначаются обычно прописными буквами или прописными буквами с нижними индексами. Число строк и число столбцов матрицы указываются внизу: $A_{3\times 2}$, $B_{6\times 4}$ (матрица A имеет 3 строки и 2 столбца, а матрица B имеет 6 строк и 4 столбца).

Пример. Указать размер матрицы $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ответ: $A_{3\times 2}$.

4.1.2 Сложение матриц

Говорят, что матрица C есть сумма двух матриц A и B, и пишут

$$C = A + B,$$

если каждый элемент c_{ij} матрицы C есть сумма соответствующих элементов a_{ij} и b_{ij} матриц A и B соответственно, т.е.

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m; \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ясно, что складывать можно только матрицы одинаковых размеров.

Иногда, определяя сложение двух матриц, выражаются менее формально (более просто): сложение матриц осуществляется поэлементно.

Пример. Найти сумму матриц A, B:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 7 & -2 \\ 5 & 9 & 12 \end{bmatrix}.$$

Решение.

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 7 & -2 \\ 5 & 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 12 & -3 \\ 7 & 6 & 14 \end{bmatrix}.$$

4.1.3 Умножение матрицы на число

Умножить матрицу A на число λ — это значит умножить каждый элемент матрицы на это число λ. То есть если матрица A состоит из элементов a_{ij}, то матрица λA состоит из элементов (λa_{ij}).

Пример. Вычислить матрицу $7A$, если

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение.

$$7A = \begin{bmatrix} 21 & 35 & -7 \\ 14 & -21 & 14 \end{bmatrix}.$$

4.1.4 Специальные матрицы

- Нулевая матрица размера $m \times n$ обозначается $O_{m\times n}$ и состоит только из нулевых элементов:

$$O_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} .$$

- Квадратная матрица — это матрица, в которой число строк равно числу столбцов. Это число (строк или столбцов) называется **порядком** квадратной матрицы. Вот пример квадратной матрицы третьего порядка:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 5 & 11 & 7 \end{bmatrix} .$$

  Диагональю квадратной матрицы называется совокупность элементов матрицы вида a_{ii} . В предыдущем примере диагональ матрицы состоит из чисел $3, -1, 7$.

- Единичная матрица n-го порядка:

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n} = (\delta_{ij})_{n\times n} .$$

- Скалярная матрица n-го порядка — это матрица вида λE_n :

$$\lambda E_n = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}_{n\times n} = (\lambda\delta_{ij})_{n\times n} .$$

- Верхняя треугольная матрица — это такая квадратная матрица, что при $i > j$ $a_{ij} = 0$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} .$$

- Нижняя треугольная матрица — это такая квадратная матрица, что при $i < j$ $a_{ij} = 0$:

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right] .$$

  В следующем примере складываются три квадратные матрицы: так называемая диагональная, верхняя и нижняя треугольные:

$$\left[\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{ccc} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 7 & 7 & 3 \\ 4 & 11 & 4 \\ 2 & 3 & 9 \end{array}\right] .$$

- Матрица-столбец (вектор-столбец) — это матрица размера $m \times 1$. Вектор-столбец называют иногда просто столбцом или просто вектором. Обозначают малыми буквами со стрелкой вверху:

$$\vec{a} = \left[\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \cdots \\ a_m \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} a_{1\cdot} \\ a_{2\cdot} \\ a_{3\cdot} \\ \cdots \\ a_{m\cdot} \end{array}\right] .$$

  (Традиционная запись столбца и строгая нотация.)

- Матрица-строка (вектор-строка) — это специальная матрица размера $1 \times n$. Вектор-строку называют иногда просто строкой или просто вектором. Обозначают малыми буквами со стрелкой вверху и верхним индексом $\top$ (а часто и без него), разделяя иногда элементы запятыми:

$$\vec{a}^\top = [a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_{\cdot 1}, a_{\cdot 2}, \ldots, a_{\cdot n}] .$$

- Нуль-вектор:

$$\vec{0} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{array}\right] , \qquad \vec{0}^\top = [0, 0, \ldots, 0] .$$

4.1.5 Замечание по индексации

Индексы элементов матрицы (двойные номера) можно ставить не только внизу, но и вверху, и даже на разных уровнях, т.е. можно писать:

$$a_{ij}, \quad a^{ij}, \quad a^i_j.$$

В последнем случае для указания порядка индексов (который из них первый, который второй) используется вспомогательная точка:

$$a^i_{\cdot j}, \qquad a_i^{\cdot j}.$$

Соглашение по записи. Если в разноуровневой индексации нет точек, то в индексном выражении a^i_j верхний индекс i — это номер строки, а нижний индекс j — это номер столбца.

4.1.6 Транспонирование

Транспонированием матрицы называется унарная (одноместная) операция, обозначаемая знаком $\top$ $(B = A^\top)$ и задаваемая формулой $b_{ij} = a_{ji}$, или в другой записи $a^\top{}_{ij} = a_{ji}$.

Транспонирование меняет размер матрицы:

$$(A_{m\times n})^\top = (A^\top)_{n\times m} = B_{n\times m}\ .$$

Практически: чтобы протранспонировать матрицу, нужно каждую ее строку записать в столбец (столбцы при этом вытянутся в строки); например,

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 7 & -5 & 3 \\ -2 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}^\top_{4\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -2 & 0 \\ 6 & -5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 11 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 4}.$$

Транспонирование строк и столбцов происходит понятным образом; запись возможна как в строгой нотации, так и в традиционной:

$$[a_{\cdot 1}, a_{\cdot 2}, a_{\cdot 3}, a_{\cdot 4}]^\top = \begin{bmatrix} a_{1\cdot} \\ a_{2\cdot} \\ a_{3\cdot} \\ a_{4\cdot} \end{bmatrix}, \qquad [a_1, a_2, a_3, a_4]^\top = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}.$$

4.1.7 Умножение строки на столбец

Пусть даны строка $\vec{a}^\top$ и столбец $\vec{b}$ (длина строки обязательно равна высоте столбца); произведением строки на столбец называется число

$$c = \vec{a}^\top \cdot \vec{b} = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \ ,$$

то же соотношение в строгой нотации выглядит так:

$$c = \vec{a}^\top \cdot \vec{b} = [a_{\cdot 1}, a_{\cdot 2}, \ldots, a_{\cdot n}] \cdot \begin{bmatrix} b_{1\cdot} \\ b_{2\cdot} \\ \ldots \\ b_{n\cdot} \end{bmatrix} = a_{\cdot 1} b_{1\cdot} + a_{\cdot 2} b_{2\cdot} + \ldots + a_{\cdot n} b_{n\cdot} \ .$$

4.1.8 Умножение матрицы на матрицу

Произведением матрицы $A_{m\times \underline{k}}$ на матрицу $B_{\underline{k}\times n}$ (размеры матриц должны быть, как говорят, согласованы: подчеркнутые индексы обязаны совпадать) называется третья матрица $C_{m\times n}$, каждый элемент которой, стоящий в i-й строке j-го столбца, есть произведение i-й строки первого сомножителя A на j-й столбец второго сомножителя B , т.е.

$$c_{ij} = [a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{ik}] \cdot \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \ldots \\ b_{kj} \end{bmatrix} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j} + \ldots + a_{ik} b_{kj} \ ,$$

в этой формуле

$$i = 1, 2, \ldots, m; \qquad j = 1, 2, \ldots, n \ .$$

Пример. Найти произведение двух матриц

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Решение.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & -5 \end{bmatrix}_{2\times 4} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 6 \end{bmatrix}_{4\times 3} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 22 \\ -37 & 63 & -37 \end{bmatrix}_{2\times 3}.$$

4.1.9 Степени квадратной матрицы

Для квадратных матриц $A_{n\times n}$ порядка n определено понятие степени:

$$\begin{array}{lcl} A^0 & = & E_n \ , \\ A^1 & = & A \ , \\ A^2 & = & A\cdot A \ , \\ \dots & \dots & \dots\dots \\ A^n & = & (A^{n-1})\cdot A \ . \end{array}$$

Ввиду ассоциативности матричного умножения, имеют место «обычные» свойства степеней:

$$\begin{array}{rcl} A^m\cdot A^n & = & A^{m+n} \ , \\ (A^m)^k & = & A^{mk} \ , \\ A^m\cdot A^n & = & A^n\cdot A^m \ . \end{array}$$

Понятие второй степени (и тем более понятие степени более высокой) можно определить только для квадратных матриц; действительно, если определено произведение

$$A_{m\times \underline{n}}\cdot A_{\underline{m}\times n} \ ,$$

то подчеркнутые индексы должны совпадать: $n=m$, а это и означает, что матрица $A_{n\times n}$ квадратная.

4.2 Конечные суммы и их свойства

В дальнейшем нам часто придется рассматривать суммы, содержащие большое число слагаемых. Для таких сумм имеется хорошее сокращенное обозначение, к которому полезно привыкнуть уже сейчас.

4.2.1 Простые суммы

Пусть имеется конечный ряд из десяти чисел

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10} \ .$$

Сумма этого ряда может быть записана в развернутой и сокращенной формах:

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=\sum_{i=1}^{10} a_i \ .$$

Пусть имеется конечный ряд из n чисел

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ \dots, \ a_n \ .$$

Сумма этого ряда может быть записана в развернутой (с естественными пропусками) и сокращенной (без пропусков) формах:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \ .$$

Имеют место следующие простые формулы, являющиеся следствиями дистрибутивности умножения относительно сложения, ассоциативности и коммутативности сложения:

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \ .$$

При решении практических задач приходится от сокращенной формы записи переходить к развернутой.

4.2.2 Двойные и повторные суммы

Аналогично простой сумме вводится и оказывается чрезвычайно удобной двойная сумма $\sum\limits_{(i,j)=(1,1)}^{(m,n)} a_{ij}$, которая определяется как сумма всех элементов матрицы $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Сумму элементов матрицы можно вычислить двояко:

- Просуммировать элементы каждой строки и затем сложить найденные суммы. Возникает повторная сумма:

$$\sum_{(i,j)=(1,1)}^{(m,n)} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

- Просуммировать элементы каждого столбца и затем сложить найденные суммы. Возникает другая повторная сумма (численно равная первой):

$$\sum_{(i,j)=(1,1)}^{(m,n)} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}.$$

4.2.3 Изменение порядка суммирования в повторных суммах

Используя два полученных выражения двойной суммы через повторные, можем приравнять друг другу эти повторные суммы и тем самым получить формулу изменения порядка повторного суммирования

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}.$$

4.2.4 Повторные суммы с переменным пределом внутреннего суммирования

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m}(a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{ii}) =^{*}$$

(номер строки меняется от 1 до m, номер столбца меняется от 1 до **номера строки**)

$$\begin{array}{llllllllll}
=^{*} & a_{11} & + & & & & & & & \\
+ & a_{21} & + & a_{22} & + & & & & & \\
+ & a_{31} & + & a_{32} & + & a_{33} & + & & & \\
+ & a_{41} & + & a_{42} & + & a_{43} & + & a_{44} & + & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
+ & a_{m1} & + & a_{m2} & + & a_{m3} & + & a_{m4} & + & \cdots + a_{mm} =^{**}
\end{array}$$

(номер столбца меняется от 1 до m, номер строки меняется от *номера столбца* до m)

$$=^{**} \sum_{j=1}^{m}(a_{jj} + a_{(j+1)j} + \ldots + a_{mj}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=j}^{m} a_{ij}.$$

4.3 Основные свойства матричных операций

4.3.1 Свойства сложения

1. $A + B = B + A$, т.к. $(a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij})$.
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
   т.к. $a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$.
3. $A_{m\times n} + O_{m\times n} = A_{m\times n}$.
4. $\forall A_{m\times n} \exists (-A)_{m\times n} \quad A + (-A) = O,$
   т.к. $a_{ij} + (-a_{ij}) = 0$.

4.3.2 Свойства умножения матрицы на число

1. $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$.
2. $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot B$.
3. $(\lambda\mu) \cdot A_{m\times n} = \lambda \cdot (\mu \cdot A_{m\times n})$.
4. $\lambda \cdot O_{m\times n} = O_{m\times n}$.
5. $0 \cdot A_{m\times n} = O_{m\times n}$.
6. $1 \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n}$.
7. Если k — натуральное число, то

$$\underbrace{A + A + A + \ldots + A}_{k \text{ слагаемых}} = k \cdot A.$$

4.3.3 Свойства матричного умножения

1. В общем случае матрицы не перестановочны при умножении:

$$A \cdot B \neq B \cdot A \ .$$

Контрпример.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -3 \\ 23 & -2 \end{bmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}.$$

В этом контрпримере действительно $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Определение. Если $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы A, B называются коммутирующими, или перестановочными.

2. $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$ — ассоциативность матричного умножения; $(A_{m\times n} \cdot B_{n\times p}) \cdot C_{p\times q} = A_{m\times n} \cdot (B_{n\times p} \cdot C_{p\times q})$. Действительно,

$$\sum_{s=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ks} \right) c_{sj} = \sum_{(s,k)=(1,1)}^{(p,n)} (a_{ik} b_{ks} c_{sj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{s=1}^{p} b_{ks} c_{sj} \right).$$

3. $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$, $\quad C\cdot(A+B) = C\cdot A + C\cdot B$ — дистрибутивность матричного умножения относительно матричного сложения.

4. $A_{m\times s}\cdot O_{s\times n} = O_{m\times n}$, $\quad O_{k\times s}\cdot A_{s\times m} = O_{k\times m}$.

5. $A_{m\times n}\cdot E_n = A_{m\times n}$, $\quad E_m\cdot A_{m\times n} = A_{m\times n}$.
   Действительно, первое из двух свойств можно записать подробнее:
$$(a_{ij})_{m\times n}\cdot(\delta_{jk})_{n\times n} = (a_{ik})_{m\times n};$$
   но тогда доказательство очевидно:
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{jk} = \underbrace{a_{i1}\delta_{1k}}_{=0} + \underbrace{a_{i2}\delta_{2k}}_{=0} + \ldots + \underbrace{a_{ik}\delta_{kk}}_{=a_{ik}} + \ldots + \underbrace{a_{in}\delta_{nk}}_{=0} = a_{ik}.$$

6. $(\lambda\mu)\cdot A = \lambda(\mu A)$.

7. $\lambda(A\cdot B) = (\lambda A)B$.

8. $A\cdot(\lambda B) = \lambda(A\cdot B)$.

4.3.4 Свойства транспонирования

1. $(A^\top)^\top = A$.

2. $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$.

3. $(A_{m\times n}\cdot B_{n\times k})^\top = {B^\top}_{k\times n}\cdot {A^\top}_{n\times m}$.

Доказательство. Пусть
$$\begin{array}{lll} A=(a_{ij})_{m\times n} & A^\top = ({a^\top}_{ji})_{n\times m}, & {a^\top}_{ji} = a_{ij}, \\ B=(b_{js})_{n\times k} & B^\top = ({b^\top}_{sj})_{k\times n}, & {b^\top}_{sj} = c_{jc}, \\ C=(c_{is})_{m\times k} & C^\top = ({c^\top}_{si})_{k\times m}, & {c^\top}_{si} = c_{is}, \end{array} \quad \text{тогда}$$
$$c_{is} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{js} = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{in}]\cdot\begin{bmatrix} b_{1s}\\ b_{2s}\\ \vdots\\ b_{js}\\ \vdots\\ b_{ns}\end{bmatrix} =$$

$$
= [b^{\top}_{s1}, b^{\top}_{s2}, \ldots, b^{\top}_{sj}, \ldots, b^{\top}_{sn}] \cdot \begin{bmatrix} a^{\top}_{1i} \\ a^{\top}_{2i} \\ \vdots \\ a^{\top}_{ji} \\ \vdots \\ a^{\top}_{ni} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} b^{\top}_{sj} a^{\top}_{ji} = c^{\top}_{si} \,.
$$

4.4 Детерминанты квадратных матриц (определители)

4.4.1 Предварительное соглашение

Если A обозначает некоторую матрицу, то A_{ks} обозначает матрицу, полученную из A удалением (или, как иногда говорят, вычеркиванием) k-й строки и s-го столбца. Стоит особо подчеркнуть, что после удаления из матриц B, T k-й строки и s-го столбца получаются матрицы B_{ks} и T_{ks} соответственно. Это обозначение не является общепринятым, но очень удобно и постоянно используется в нашем курсе.

4.4.2 Индуктивное определение детерминанта

Детерминант ($\det$) — это функция, действующая из множества квадратных матриц в поле $\mathbb{F}$ и определяемая индуктивно по порядку матрицы n :

$$
\begin{cases}
\det(a)_{1\times 1} & = & a \\
\det A_{n\times n} & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \cdot \det(A_{1j})_{(n-1)\times(n-1)} \,.
\end{cases}
$$

В первой строке (база индуктивного определения) определяется значение детерминанта матрицы, состоящей из одного элемента, оно равно самому этому элементу.

Во второй строке (собственно индукция) детерминант матрицы порядка n определяется через детерминанты матриц порядка $(n-1)$ и элементы первой строки исходной матрицы (говорят, что детерминант раскладывается по первой строке).

В следующих пунктах мы увидим, как работает это определение.

Число $\det A_{ij}$ называется минором элемента a_{ij}.

Множитель $(-1)^{i+j}$ — это так называемый дополнительный знак элемента a_{ij}.

Число $(-1)^{i+j}\det A_{ij}$ называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij}. Пока мы используем только $i=1$.

4.4.3 Детерминанты матриц второго порядка

Рассмотрим общую матрицу второго порядка и получим формулу детерминанта матрицы второго порядка, исходя из индуктивного определения:

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} &= \sum_{j=1}^{2} a_{1j}\cdot(-1)^{1+j}\cdot\det(A_{1j}) = \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}\cdot\det(A_{11}) + a_{12}(-1)^{1+2}\cdot\det(A_{12}) = \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}\cdot\det(a_{22}) + a_{12}(-1)^{1+2}\cdot\det(a_{21}) = \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}\cdot a_{22} + a_{12}(-1)^{1+2}\cdot a_{21} = \\ &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.\end{aligned}$$

Иногда говорят, что детерминант матрицы второго порядка равен произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали.

Для обозначения детерминантов часто применяют модульные скобки. При этом скобки окружающие саму матрицу опускают:

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}.$$

Мы будем пользоваться различными обозначениями, исходя только из соображений удобства.

4.4.4 Детерминанты матриц третьего порядка

В приложениях нашего курса чаще всего приходится вычислять детерминанты третьего порядка, поэтому рассмотрим этот вопрос подробно.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}\cdot(-1)^{1+j}\cdot\det(A_{1j}) =$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\det A_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}\det A_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}\det A_{13} =$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{33} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Последние шесть слагаемых легко просматриваются в матрице, полученной из исходной приписыванием справа двух первых столбцов.

Пример. Вычислить детерминант матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 1 \\ 8 & 0 & 6 \end{bmatrix} .$$

Решение.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 1 \\ 8 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (18 - 0) - 2 \cdot (-6 - 8) + 7 \cdot (0 - 24) = 54 + 28 - 168 = -86 .$$

4.4.5 Невырожденные и вырожденные матрицы

Матрица называется невырожденной, если $\det A \neq 0$, и называется вырожденной, если $\det A = 0$. Понятия невырожденности и вырожденности будут иметь важное значение при изучении обращения матриц — аналога операции деления в поле рациональных чисел.

4.5 Основные свойства детерминанта

Излагаемые далее свойства детерминанта имеют не только теоретическое значение, но могут применяться и в вычислительной практике.

4.5.1 Разложение по первой строке

В нашем варианте теории детерминантов разложение по первой строке — это само определение детерминанта:

$$\det A_{n\times n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \cdot \det(A_{1j})_{(n-1)\times(n-1)}.$$

4.5.2 Разложение по первому столбцу

Имеет место формула, аналогичная формуле определения, но использующая для разложения детерминанта n-го порядка не первую строку, а первый столбец матрицы:

$$\det A_{n\times n} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot \det(A_{i1})_{(n-1)\times(n-1)} \ .$$

Доказательство. Проводится методом математической индукции.

База индукции. Для $n = 1$ очевидно.

Расширение базы индукции. Для $n = 2$ доказывается прямым вычислением.

Индукционный переход. Предположим, что формула верна для всех матриц порядка $(n-1)$.

Разложим $\det A_{n\times n}$ по элементам первой строки:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \ \det(A_{1j}) =$$

$$= a_{11} \det A_{11} + \sum_{j=2}^{n} a_{1j} (-1)^{1+j} \ \det(A_{1j}) =^{*} .$$

Разложим согласно индукционному предположению каждый $\det A_{1j}$ по элементам 1-го столбца:

$$\det A_{1j} = \sum_{i=2}^{n} a_{i1} (-1)^{(i-1)+1} \det(A_{1j})_{(i-1)1} .$$

Продолжим основное вычисление:

$$=^{*} \ a_{11} \det A_{11} + \sum_{j=2}^{n} a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \sum_{i=2}^{n} a_{i1} (-1)^{(i-1)+1} \det(A_{1j})_{(i-1)1} =$$

$$= a_{11} \det A_{11} + \sum_{i=2}^{n} a_{i1} (-1)^{i+1} \sum_{j=2}^{n} a_{1j} (-1)^{1+(j-1)} \det(A_{i1})_{1(j-1)} =$$

$$= a_{11} \det A_{11} + \sum_{i=2}^{n} a_{i1} (-1)^{i+1} \det A_{i1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} (-1)^{i+1} \det A_{i1},$$

что и достаточно для доказательства методом математической индукции.

Пример. Вычислить детерминант матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 1 \\ 8 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

разложением по первому столбцу.
Решение.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 1 \\ 8 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot \det(A_{i1}) =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + 8 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(18-0)+1(12-0)+8(2-21) = 3 \cdot 18 + 12 - 8 \cdot 19 = 54 + 12 - 152 = -86\ .$$

4.5.3 Инвариантность детерминанта при транспонировании матрицы

Теорема.

$$\det(A^\top) = \det(A).$$

Доказательство. Проводится методом математической индукции.

Предварительное замечание. $(A_{ks})^\top = (A^\top)_{sk}$.

База индукции. Для $n = 1$ очевидно.

Расширение базы индукции. Для $n = 2$ доказывается прямым вычислением.

Индукционный переход. Предположим, что формула верна для всех матриц порядка $(n-1)$. Разложим $\det A^\top$ по первому столбцу, учитывая, что в нем стоят элементы первой строки матрицы A :

$$\det A^\top = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}(-1)^{i+1} \det(A^\top)_{i1} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}(-1)^{1+i} \det(A_{1i})^\top =^{**}$$

Применим индукционное предположение:

$$=^{**} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}(-1)^{1+i} \det(A_{1i}) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j} \det(A_{1j}).$$

4.5.4 Антисимметрия (кососимметрия) детерминанта

Теорема. При перемене местами в матрице двух строк (двух столбцов) детерминант меняет знак на противоположный.

Доказательство частного случая. Если две рядом стоящие строки матрицы A поменять местами, то для полученной матрицы $\tilde{A}$

$$\det \tilde{A} = -\det A.$$

База индукции. $n = 2$.

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{12} \\ a_{11} & a_{21} \end{bmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -\det A.$$

Индукционный переход. Предположим, что доказываемое верно для всех матриц порядка $(n-1)$. В матрице A поменяем местами строки с номерами k и $(k+1)$, тогда получится матрица $\tilde{A}$.

Разложим матрицу A по первому столбцу, выделяя из общей суммы слагаемые с номерами k и $(k+1)$.

$$\det A = \sum_{i\neq k,k+1}^{n} a_{i1}(-1)^{i+1}\det A_{i1} +$$
$$+ a_{k1}(-1)^{k+1}\det A_{k1} + a_{(k+1)1}(-1)^{(k+1)+1}\det A_{(k+1)1} =$$
$$= \sum_{i\neq k,k+1}^{n} \tilde{a}_{i1}(-1)^{i+1}(-\det \tilde{A}_{i1}) +$$
$$+ \tilde{a}_{(k+1)1}(-1)^{k+1}\det \tilde{A}_{(k+1)1} + \tilde{a}_{k1}(-1)^{(k+1)+1}\det \tilde{A}_{k1} =$$
$$= -\sum_{i\neq k,k+1}^{n} \tilde{a}_{i1}(-1)^{i+1}\det \tilde{A}_{i1} -$$
$$- \tilde{a}_{(k+1)1}(-1)^{k+1+1}\det \tilde{A}_{(k+1)1} - \tilde{a}_{k1}(-1)^{k+1}\det \tilde{A}_{k1} =$$
$$= -\det \tilde{A}$$

Доказательство общего случая (для строк). Пусть меняются местами две строки с номерами $k,\, m > k+1$.

Проделав $(m-k-1)+1+(m-k-1)$ перестановку соседних строк, сделаем отмеченные строки переставленными.

Произведено всего $2(m-k-1)+1$ перестановок соседних строк. Знак детерминанта изменился на противоположный.

4.5.5 Достаточное условие вырожденности

Следствием кососимметричности является следующее достаточное условие вырожденности матрицы.

Теорема. Если в матрице A имеются хотя бы две одинаковые строки (два одинаковые столбца), то $\det A = 0$, т.е. матрица A вырожденная.

Доказательство. Если в матрице A имеются хотя бы две одинаковые строки (два одинаковые столбца), то при перемене местами двух таких строк (столбцов) детерминант d , с одной стороны, меняет знак, а с другой стороны, вовсе не изменяется: $-d = d,$ следовательно, $d = 0.$

4.5.6 Разложение детерминанта матрицы по произвольной строке или по произвольному столбцу

Аналогично свойствам 1 и 2 детерминант матрицы можно раскладывать по произвольной строке или по произвольному столбцу, т.е. имеют место две формулы:

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n \qquad \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij}) \ ,$$

$$\forall j = 1, 2, \ldots, n \qquad \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij}) \ .$$

Доказательство проводится перестановкой произвольной строки с номером i и строки с номером 1 .

Замечание. Для вычисления детерминанта при ручном счете используется строка или столбец, содержащие большое число нулей, т.к. сомножители этих нулей вычислять не нужно.

Пример. Вычислить детерминант матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 6 & 0 \\ -5 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} .$$

Решение.
Больше всего нулей в 4-м столбце, поэтому разложение ведем по 4-му столбцу:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 6 & 0 \\ -5 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 8 & 0 & 6 \\ -5 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

детерминант матрицы 3-го порядка разложим по элементам второго столбца:

$$= 4(-1)3(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 12 \cdot (24 - (-30)) = 12 \cdot 54 = 648.$$

Если в матрице есть нулевая строка или нулевой столбец, то детерминант матрицы равен нулю.

4.5.7 Линейность детерминанта по строкам (и столбцам)

1. Если в матрице некоторую строку (столбец) умножить на постоянный множитель $x \in \mathbb{F}$, то детерминант умножится на тот же множитель; другими словами, общий множитель строки (столбца) можно вынести за знак детерминанта:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ xa_{i1} & xa_{i2} & \cdots & xa_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. Если элементы i-й строки матрицы суть суммы двух элементов $a_{ik} + b_{ik}$, то детерминант матрицы раскладывается в сумму детерминантов двух матриц: у одной в i-й строке стоят элементы a_{ik}, а у другой в i-й строке стоят элементы b_{ik}:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_{i1} + b_{i1}) & (a_{i2} + b_{i2}) & \cdots & (a_{in} + b_{in}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .
$$

4.5.8 Свойство инвариантности (неизменности) детерминанта

Теорема. Если к некоторой строке матрицы прибавить другую строку, умноженную предварительно на произвольный множитель, то значение детерминанта матрицы от этого не изменится:

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_{i1} + xa_{j1}) & (a_{i2} + xa_{j2}) & \cdots & (a_{in} + xa_{jn}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .
$$

Обобщение. Если к некоторой строке матрицы прибавить линейную комбинацию других строк, то значение детерминанта матрицы от этого не изменится.

Приложения. Свойство инвариантности применяется для преобразования матрицы (без изменения значения детерминанта) с целью упрощения вычислений; для этого нужно в матрице получить побольше нулей. Например, для вычисления детерминанта матрицы

$$
A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}
$$

можно к первой строке прибавить третью, умноженную предварительно на -3, а ко второй строке прибавить первую, умноженную предварительно на -5, затем разложить по элементам первого столбца:

$$
\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -7 & -7 \\ 0 & -19 & -9 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -7 & -7 \\ -19 & -9 \end{vmatrix} = -70 .
$$

4.5.9 Разложение по «чужой» строке

Теорема. Если для произвольной квадратной матрицы составить сумму произведений элементов некоторой строки на алгебраические дополнения элементов другой строки, то такая сумма будет равна нулю:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot ((-1)^{k+j} \det A_{kj}) = 0 \quad \text{при } i \neq k\,.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что написанная сумма есть детерминант матрицы с двумя равными строками: i-й и k-й.

Анонс. После изучения темы «Подстановки и перестановки» мы получим одну очень известную, теоретически интересную, хотя и не очень практичную формулу, выражающую детерминант матрицы непосредственно через все элементы матрицы.

5 Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

5.1 Основные понятия и определения теории линейных систем

Линейная система алгебраических уравнений — это система конечного числа уравнений, в каждое из которых неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ входят только в виде слагаемых с постоянными коэффициентами; вот стандартный вид линейной системы:

$$\left\{\begin{array}{lccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \ldots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \ldots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \ldots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. .$$

5.1.1 Матричная запись линейной системы

Систему линейных алгебраических уравнений можно записать в виде одного матричного уравнения

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1m} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad ;$$

или в компактной записи (удобной в теории)

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}\,.$$

Матрица A называется основной матрицей системы. Столбец $\vec{b}$ называется столбцом свободных членов системы.

Если к матрице A приписать справа столбец $\vec{b}$, то получится так называемая расширенная матрица системы

$$\left[\, A \;\mid\; \vec{b} \,\right]_{m\times(n+1)},$$

которая вполне характеризует систему уравнений (ведь имена неизвестных не принципиальны при решении математической задачи). Вот развернутая запись расширенной матрицы:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Анонс. Матричная форма системы линейных уравнений есть частный случай матричного уравнения

$$A_{m\times n}X_{n\times k} = B_{m\times k}.$$

5.1.2 Что такое решение линейной системы

Решение линейной системы алгебраических уравнений — это набор чисел (матрица-столбец) $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$, обращающий каждое уравнение системы в тождество. Например, вектор-столбец $(3, -1, 7)^\top$ является решением системы

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4x_1 + 5x_2 - x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 21 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 & = & 21 \end{array}\right..$$

В этом мы убедимся, подставляя вместо переменных x_1, x_2, x_3 числа $3, -1, 7$ соответственно:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4\cdot 3 + 5\cdot(-1) - 7 & = & 0 \\ 2\cdot 3 - (-1) + 2\cdot 7 & = & 21 \\ 6\cdot 3 + 4\cdot(-1) + 7 & = & 21 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & 0 \\ 21 & = & 21 \\ 21 & = & 21 \end{array}\right..$$

Заметим, что у этой системы имеются и другие решения.

5.1.3 Что значит решить линейную систему

Решить линейную систему — это значит найти ВСЕ решения этой линейной системы.

5.1.4 Сколько решений может иметь линейная система

При решении линейной системы возможна одна из трех ситуаций:

1. Система имеет единственное решение.
2. Система не имеет решений.
3. Система имеет бесконечно много решений.

Возможность этих ситуаций показывают следующие примеры систем, содержащих по одному уравнению с одним неизвестным:

1. $1x = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$.
2. $0x = 1 \quad \Longrightarrow$ решений нет.
3. $0x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x$ — любое число.

Других ситуаций в теории линейных систем нет. Доказательству этого утверждения посвящен следующий пункт.

5.1.5 Когда решений бесконечно много

Теорема. Если система имеет два различных решения, то она их имеет бесконечно много.

Доказательство.

$$\begin{cases} A\vec{x}_1 = \vec{b} \\ A\vec{x}_2 = \vec{b} \\ \vec{x}_1 \neq \vec{x}_2 \end{cases} \Longrightarrow \forall t \in \mathbb{F} \quad A \cdot (\vec{x}_1 + t(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)) = \vec{b}.$$

5.2 Системы Крамера и их решение

Определение. Системы уравнений, в которых число уравнений равно числу неизвестных и основная матрица невырожденная ($\det \neq 0$), называются **системами Крамера.**

Теорема. Системы Крамера имеют единственное решение, которое может быть найдено по так называемым формулам Крамера

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\ .$$

В этих формулах $\Delta = \det A$ — это детерминант основной матрицы. Δ_i — детерминант, соответствующий переменной x_i; он получается из детерминанта основной матрицы заменой i-го столбца на столбец свободных членов.

Доказательство существования. Рассмотрим детерминант матрицы, полученной из расширенной приписыванием снизу ее произвольной строки с номером i.

Так как в полученной квадратной матрице есть две одинаковые строки, то детерминант этой матрицы будет равен нулю. Разложим детерминант по элементам последней $(n+1)$-й строки:

$$\det \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{12} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} & b_i \end{array}\right] = 0, \quad \text{т.е.}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{n+1+j} \det(A_{\cdot j}|\vec{b}) + b_i(-1)^{n+1+n+1} \det A = 0,$$

а следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{n+1+j} \det(A_{\cdot j}|\vec{b}) = -b_i(-1)^{n+1+n+1} \det A,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{n+1+j} \Delta_j (-1)^{n-j} = -b_i \Delta,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1) \Delta_j = -b_i \Delta,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\Delta_j}{\Delta} = b_i, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n;$$

таким образом, существует вектор-столбец

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1/\Delta \\ \Delta_2/\Delta \\ \vdots \\ \Delta_n/\Delta \end{bmatrix},$$

являющийся решением системы Крамера.

Доказательство единственности. Пусть некоторый набор чисел

$$(x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_n)^\top$$

есть решение системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

или в краткой записи

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{s=1}^{n} a_{is}x_s = b_i \\ \qquad\qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n. \end{cases}$$

Умножим каждую i-ю строку системы на алгебраические дополнения элементов i-й строки j-го столбца основной матрицы, т.е. на

$$(-1)^{i+j}\det A_{ij},$$

и сложим все правые и левые части полученных таким образом равенств:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{is}x_s(-1)^{i+j}\det A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} b_i(-1)^{i+j}\det A_{ij}.$$

Изменим порядок суммирования:

$$\sum_{s=1}^{n} x_s \sum_{i=1}^{n} a_{is}(-1)^{i+j}\det A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} b_i(-1)^{i+j}\det A_{ij}.$$

Правая часть равенства есть Δ_j, а в левой части только одно слагаемое внешней суммы отлично от нуля — слагаемое с номером j (другие являются разложениями по «чужим» строкам):

$$x_j \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij}}_{=\Delta} = \Delta_j \, .$$

Отсюда уже непосредственно следует требуемое.

Пример. Решить систему Крамера

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 7. \end{cases}$$

Решение.
Расширенная матрица системы запишется так:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{array} \right] .$$

Детерминант основной матрицы

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2 \neq 0 \, .$$

Детерминант, соответствующий переменной x_1,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 35 = -19 \, .$$

Детерминант, соответствующий переменной x_2,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 8 = 13 \, .$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-19}{2} = -9.5 \, , \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{13}{2} = 6.5 \, .$$

Ответ.

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -9.5 \\ 6.5 \end{bmatrix} .$$

Метод Крамера можно применять при ручном решении линейных систем 2-го, 3-го, иногда 4-го порядков. При решении систем порядка более 4 метод Крамера приводит к неоправданно большому объему вычислений.

Удобен метод Крамера и при решении «функциональных» систем.

Пример. Найти неизвестные функции $x_1, x_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие системе двух уравнений

$$\begin{cases} x_1(t)\cdot\cos t & + & x_2(t)\cdot\sin t & = & \operatorname{tg} t \\ x_1(t)\cdot(-\sin t) & + & x_2(t)\cdot\cos t & = & \dfrac{1}{\cos t} \end{cases} .$$

Решение.
Расширенная матрица системы

$$\left[\begin{array}{rr|l} \cos t & \sin t & \operatorname{tg} t \\ -\sin t & \cos t & 1/\cos t \end{array}\right] .$$

Детерминант основной матрицы

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \neq 0 .$$

Детерминант, соответствующий неизвестной $x_1(t)$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \operatorname{tg} t & \sin t \\ 1/\cos t & \cos t \end{vmatrix} = (\sin t - \operatorname{tg} t) .$$

Детерминант, соответствующий неизвестной $x_2(t)$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos t & \operatorname{tg} t \\ -\sin t & 1/\cos t \end{vmatrix} = 1 + \frac{\sin^2 t}{\cos t} .$$

По формулам Крамера

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{(\sin t - \operatorname{tg} t)}{1} = \sin t - \operatorname{tg} t \\ x_2(t) = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{1 + \frac{\sin^2 t}{\cos t}}{1} = 1 + \dfrac{\sin^2 t}{\cos t} \end{cases} .$$

Пример (для самостоятельного решения). Найти неизвестные функции $x_1, x_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие системе двух уравнений

$$\begin{cases} x_1(t)\cdot t^2 & + & x_2(t)\cdot t & = & 2t + 6t^2 \\ x_1(t)\cdot t & + & x_2(t)\cdot t^2 & = & 6t + 2t^2. \end{cases}$$

Ответы.

$$\Delta = t^4 - t^2, \qquad \Delta_1 = 6t^4 - 6t^2, \qquad \Delta_2 = 2t^4 - 2t^2;$$

$$x_1(t) \equiv 6, \qquad\qquad x_1(t) \equiv 2.$$

6 Метод Гаусса (метод элементарных преобразований) как основной метод матричной алгебры

6.1 Применение элементарных преобразований матриц для анализа и решения линейных систем (практический аспект)

6.1.1 Что такое элементарные строковые преобразования матриц

Элементарные строковые преобразования матрицы над полем $\mathbb{F}$ таковы:

- перестановка двух строк;
- умножение некоторой строки на *ненулевой* множитель $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$;
- прибавление к i-й строке j-й строки, умноженной предварительно на произвольный множитель $\lambda \in \mathbb{F}$.

6.1.2 Эквивалентные преобразования линейных систем

Эквивалентные преобразования системы — это преобразования, не меняющие множества решений этой системы; простейшие из них таковы:

- перестановка двух уравнений системы;
- умножение некоторого уравнения системы (его левой и правой частей) на *ненулевой* множитель;
- прибавление к i-му уравнению j-го уравнения, умноженного предварительно на произвольный множитель (складываются левые и правые части соответственно).

Если мы сопоставим какую-нибудь систему линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \dots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

и ее расширенную матрицу

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right],$$

то увидим, что простейшие эквивалентные преобразования системы и элементарные преобразования расширенной матрицы системы находятся во взаимно однозначном соответствии друг с другом. Упрощая расширенную матрицу (создавая в ней как можно больше нулей) с помощью элементарных преобразований, мы тем самым переходим от исходной системы к более простой, не изменяя множества решений.

6.1.3 Метод Гаусса анализа и решения линейной системы (практический аспект)

Метод Гаусса — это метод такого последовательного применения элементарных строковых преобразований расширенной матрицы, что столбцы расширенной матрицы последовательно «превращаются» в столбцы единичной матрицы.

Подробно рассмотрим три несложных примера анализа и решения линейных систем.

Пример 1. Вот система и ее расширенная матрица:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x_1+4x_2-6x_3 & = & 2\\ 3x_1-x_2+x_3 & = & 2\\ x_1-4x_2+x_3 & = & -9\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & -6 & 2\\ 3 & -1 & 1 & 2\\ 1 & -4 & 19 & -9\end{array}\right].$$

Разделим первую строку на 2:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 1\\ 3 & -1 & 1 & 2\\ 1 & -4 & 1 & -9\end{array}\right].$$

Прибавим ко второй строке первую, умноженную предварительно на -3, прибавим к третьей строке первую, умноженную предварительно на -1 :

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 1\\ 0 & -7 & 10 & -1\\ 0 & -6 & 4 & -10\end{array}\right].$$

Вторую строку разделим на -7 :

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -\frac{10}{7} & \frac{1}{7}\\ 0 & -6 & 4 & -10\end{array}\right].$$

Прибавим к первой строке вторую, умноженную предварительно на -2, прибавим к третьей строке вторую, умноженную предварительно на 6:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7}\\ 0 & 1 & -\frac{10}{7} & \frac{1}{7}\\ 0 & 0 & -\frac{32}{7} & -\frac{64}{7}\end{array}\right].$$

Разделим третью строку на $-\frac{32}{7}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{10}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Прибавим к первой строке третью, умноженную предварительно на $\frac{1}{7}$, прибавим ко второй строке третью, умноженную предварительно на $\frac{10}{7}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Более упростить расширенную матрицу с помощью строковых преобразовний нельзя. Переходя от расширенной матрицы к соответствующей ей системе (эквивалентной) исходной, получим

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & 3 \\ x_3 & = & 2, \end{cases}$$

из чего видно, что система имеет единственное решение (анализ завершен), и это решение пред нами:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Пример 2. Вот другая система и ее расширенная матрица:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 2 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 & = & 8 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right].$$

Делая ряд упрощений аналогично примеру 1:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 3 & -4 \\ 0 & -14 & 6 & -7 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & -14 & 6 & -7 \end{array}\right],$$

получим такую расширенную матрицу:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Интерпретируя последнюю строчку матрицы уравнением, получим

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \implies 0 = 1.$$

Эта система противоречива — не имеет решений (анализ завершен).
Пример 3. Вот еще одна система и ее расширенная матрица:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 & = & 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 & = & 9 \\ x_1 - 7x_2 + x_3 & = & -5 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -4 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & -7 & 1 & -5 \end{array}\right].$$

Чтобы уменьшить количество дробей при ручном счете, поменяем местами первую и третью строки, а далее будем действовать аналогично примерам 1 и 2:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -7 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ 3 & -4 & 5 & 4 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -7 & 1 & -5 \\ 0 & 17 & 2 & 19 \\ 0 & 17 & 2 & 19 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -7 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{2}{17} & \frac{19}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{31}{17} & \frac{48}{17} \\ 0 & 1 & \frac{2}{17} & \frac{19}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Далее уже невозможно продолжать упрощение расширенной матрицы. Перейдем от упрощенной матрицы к системе уравнений (эквивалентной исходной)

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + \frac{31}{17}x_3 & = & \frac{48}{17} \\ x_2 + \frac{2}{17}x_3 & = & \frac{19}{17} \end{array}\right. .$$

Перенося x_3 с коэффициентами в правую часть, получим решение системы в следующем виде:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{48}{17} - \frac{31}{17}x_3 \\ x_2 & = & \frac{19}{17} - \frac{2}{17}x_3 \\ x_3 \in \mathbb{F} & - & \text{любое число из } \mathbb{F}. \end{array}\right.$$

Система имеет бесконечно много решений (анализ завершен), и эти решения даны последней формулой. Но чтобы появился искомый столбец (искомые столбцы), заменим фразу « $x_3 \in \mathbb{F}$ — любое число из $\mathbb{F}$ » формальным алгебраическим соотношением $x_3 = x_3$:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 & = & \frac{48}{17} - \frac{31}{17}x_3 \\ x_2 & = & \frac{19}{17} - \frac{2}{17}x_3 \\ x_3 & = & x_3 \end{array}\right. , \quad x_3 \in \mathbb{F}.$$

Ответ можно записать теперь так:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 48/17 \\ 19/17 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -31/17 \\ -2/17 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{F},$$

или еще лучше так:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 48/17 \\ 19/17 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -31/17 \\ -2/17 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{F}.$$

6.2 Кортеж линейных систем и его решение методом Гаусса; матричные уравнения

6.2.1 Кортеж и его расширенная матрица

Определение. Кортеж систем линейных уравнений — это совокупность систем, имеющих одну и ту же основную матрицу A, но имеющих, быть может, различные столбцы свободных членов $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k$.
Пример.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 & = & -5 \\ 2x_1 + 5x_2 & = & -8 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 & = & 2 \\ 2x_1 + 5x_2 & = & 3 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 & = & 6 \\ 2x_1 + 5x_2 & = & 11 \end{array} \right. .$$

Данный кортеж можно записать короче:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 & = & -5; 2; 6 \\ 2x_1 + 5x_2 & = & -8; 3; 11 \end{array} \right. .$$

Общий вид. Вот общий вид кортежа систем m уравнений с n неизвестными и с k столбцами свободных членов:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_{11}; b_{12}; & \cdots & ; b_{1k} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_{21}; b_{22}; & \cdots & ; b_{2k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \cdots & \ldots\ldots & \cdots & \ldots\ldots\ldots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \cdots & +a_{mn}x_n & = & b_{m1}; b_{m2}; & \cdots & ; b_{mk} \end{array} \right. .$$

А вот его расширенная матрица:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11}a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{11}b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ a_{21}a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{21}b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \ldots\ldots & \cdots & \cdots & \ldots\ldots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_{m1}b_{m2} & \cdots & b_{mk} \end{array} \right];$$

она вполне определяет все системы уравнений кортежа.

6.2.2 Решение кортежа систем

Решить кортеж систем — это значит решить все системы кортежа, т.е. найти все наборы столбцов $\vec{x}_{\cdot 1}, \vec{x}_{\cdot 2}, \vec{x}_{\cdot 3}, \ldots, \vec{x}_{\cdot k}$ решений 1-й, 2-й, ..., k-й систем кортежа, т.е., по сути, найти матрицу

$$X = (\vec{x}_{\cdot 1}\ \vec{x}_{\cdot 2}\ \ldots\ \vec{x}_{\cdot k}).$$

Пример. Решить кортеж систем методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 & = & -5; & 2; & 6 \\ 2x_1 + 5x_2 & = & -8; & 3; & 11 \end{cases},$$

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & -5 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & -8 & 3 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & -5 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & -5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Ответы мы видим в правой части последней расширенной матрицы.

6.2.3 Матричное уравнение как кортеж

Обозначая неизвестные j-го кортежа x_{ij}, можем записать кортеж как матричное уравнение

$$\left[\begin{array}{c} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{ccc} x_{11}x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21}x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} b_{11}b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21}b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1}b_{m2} & \cdots & b_{mk} \end{array}\right],$$

или в лаконичной форме

$$A \cdot (\vec{x}_1 \vec{x}_2 \ldots \vec{x}_k) = (\vec{b}_1 \vec{b}_2 \ldots \vec{b}_k).$$

Понятно, что можно рассуждать и наоборот:

если нужно решить матричное уравнение

$$A \cdot X = B,$$

то достаточно решить кортеж с расширенной матрицей

$$[\,A \mid B\,].$$

Пример. Решить матричное уравнение $A_{3\times 3} \cdot X_{3\times 4} = B_{3\times 4}$, где

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Для данной задачи составим расширенную матрицу и упростим ее:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 4 & 6 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 4 & -5 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & -3 & -13 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 2 & 4 & -4 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & -3 & -13 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right].$$

Ответ. Решение исходного матричного уравнения единственно:

$$X = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 6 & -5 \\ -2 & -2 & -6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Неизвестная матрица слева.

$$X_{k\times m} \cdot A_{m\times n} = C_{k\times n}.$$

В этом случае можно поступить так: протранспонировать исходное матричное уравнение

$$A^\top_{n\times m} \cdot X^\top_{m\times k} = C^\top_{n\times k} ,$$

решить транспонированное уравнение, а решение $X^\top_{m\times k}$ опять же протранспонировать:

$$X_{k\times m} = (X^\top_{m\times k})^\top.$$

6.3 Вычисление детерминанта матрицы методом элементарных преобразований

Используя свойства линейности, инвариантности и антисимметричности детерминанта, и, делая метод элементарных преобразований более строгим, можно применить его для вычисления детерминантов порядка более двух. Необходимо только всегда помнить:

- Если i-я и j-я строки меняются местами, то детерминант умножается на (-1).
- Если i-я строка делится на $\hat{a}_{ii}$, то множитель $\hat{a}_{ii}$ выносится за знак детерминанта (и сохраняется как множитель до конца вычислений).
- При прибавлении к i-й строке j-й строки, умноженной предварительно на множитель λ, детерминант не изменяется.
- Обнуляются только элементы, стоящие под главной диагональю матрицы.
- Полученный столбец единичной матрицы и строку, в которой стоит единица столбца единичной матрицы, можно вычеркивать, понижая порядок детерминанта.

Теорема. $\det A$ равен произведению вынесенных за знак $\det$ множителей (если метод Гаусса завершен).

Пример. Для пояснения сказанного вычислим подробно детерминант матрицы 4-го порядка

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 & 10 & 15 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение.
Разделим первую строку на 5 (вынесем множитель 5 из первой строки за знак детерминанта):

$$\begin{vmatrix} 5 & -5 & 10 & 15 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

вычтем из 2-й, 3-й, 4-й строк 1-ю строку, умноженную соответственно на 1, 2, 4:

$$= 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 7 & -3 & -11 \end{vmatrix} = ,$$

разложим детерминант по элементам первого столбца:

$$= 5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 3 & -3 & -6 \\ 7 & -3 & -11 \end{vmatrix} = ,$$

разделим 1-ю строку на 4 (вынесем множитель 4 за знак детерминанта):

$$= 5 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3/4 & -1/4 \\ 3 & -3 & -6 \\ 7 & -3 & -11 \end{vmatrix} = ,$$

вычтем из 2-й и 3-й строк 1-ю строку, умноженную соответственно на числа 3 и 7:

$$= 20 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3/4 & -1/4 \\ 0 & -3/4 & -21/4 \\ 0 & 9/4 & -37/4 \end{vmatrix} = ,$$

разложим детерминант по элементам первого столбца и завершим вычисления очевидным образом:

$$= 20 \cdot \begin{vmatrix} -3/4 & -21/4 \\ 9/4 & -37/4 \end{vmatrix} = 20 \cdot (-3/4) \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 9/4 & -37/4 \end{vmatrix} = -15 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -25 \end{vmatrix} =$$

$$= -15 \cdot (-25) = 375 \, .$$

Замечание. При ручном счете можно и нужно применять различные «хитрости» (т.е. нужно думать).

Теоретически важный вывод (теорема): элементарные преобразования не изменяют качества матрицы:

- невырожденная матрица остается невырожденной — $\det A \neq 0$;
- вырожденная матрица остается вырожденной — $\det A = 0$.

6.4 Детерминанты матриц специального вида

Замечание. В этом вопросе и в дальнейшем большой звездочкой $\ast$ обозначаем массивы элементов матрицы, точный вид которых не существен (это могут быть как ненулевые, так и нулевые числа), а большим нулем O — массивы нулевых элементов.

6.4.1 Треугольные матрицы

Верхняя треугольная матрица.

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & \ast & \\ O & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}\,.$$

Нижняя треугольная матрица.

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & O & \\ \ast & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}\,.$$

Унитреугольные матрицы.

$$\det\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & \ast & \\ O & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & O & \\ \ast & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = 1\,.$$

Единичная матрица.

$$\det\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & O & \\ O & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = 1\,.$$

6.4.2 Блочные матрицы с нулевым блоком

Рассмотрим блочные матрицы двух типов:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{n\times n} & * \\ \hline O_{n\times n} & B_{n\times n} \end{array}\right] \text{ и } \left[\begin{array}{c|c} A_{n\times n} & O_{n\times n} \\ \hline * & B_{n\times n} \end{array}\right].$$

В этих формулах звездочкой обозначены матрицы n-го порядка, точный вид которых не существен.

Имеет место весьма выразительное соотношение

$$\det\left[\begin{array}{c|c} A_{n\times n} & * \\ \hline O_{n\times n} & B_{n\times n} \end{array}\right] = \det\left[\begin{array}{c|c} A_{n\times n} & O_{n\times n} \\ \hline * & B_{n\times n} \end{array}\right] = \det A \cdot \det B\ .$$

Докажем эту формулу для матриц первого типа. Для доказательства применим метод элементарных преобразований, которым сначала охватим первые n строк большой матрицы. При этом за знак большого детерминанта будут выноситься множители строк матрицы A. Произведение вынесенных множителей в точности равно $\det A$:

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & & & * & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & & & & \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right| =$$

$$= \det A \cdot \left|\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & & & * & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & & & & \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right| =$$

Теперь охватим элементарными преобразованиями и последние n строк большой матрицы. Нижний левый нулевой блок не меняется; множители же строк нижнего пояса являются множителями, составляющими $\det B$.

$$= \det A \cdot \det B \cdot \left|\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & & & * & \\ \cdots\cdots & & \cdots & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & & & & \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right| = \det A \cdot \det B \ .$$

6.4.3 Детерминант блочных матриц специального вида (второй случай)

Рассмотрим блочные матрицы двух типов:

$$\left[\begin{array}{c|c} O_{n\times n} & C_{n\times n} \\ \hline D_{n\times n} & * \end{array}\right] \text{ и } \left[\begin{array}{c|c} * & C_{n\times n} \\ \hline D_{n\times n} & O_{n\times n} \end{array}\right] .$$

В этих формулах звездочкой по-прежнему обозначены матрицы n-го порядка, точный вид которых не существен.

Имеет место любопытное соотношение:

$$\det \left[\begin{array}{c|c} O_{n\times n} & C_{n\times n} \\ \hline D_{n\times n} & * \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} * & C_{n\times n} \\ \hline D_{n\times n} & O_{n\times n} \end{array}\right] = (-1)^n \det C \cdot \det D \ .$$

Доказательство сводится к доказательству предыдущего пункта после n перестановок столбцов с номерами i и номерами $(n+i)$ соответственно. В результате n перестановок и возникает множитель $(-1)^n$.

6.4.4 Детерминант произведения двух квадратных матриц

Имеет место замечательная формула

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B \ .$$

Доказательство проведем, рассматривая детерминант одной блочной матрицы:

$$\det A \cdot \det B = \left|\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right| .$$

Аннулируем блок B, прибавляя к $(n+i)$-й строке (к i-й строке нижнего пояса) одну за другой 1-ю, 2-ю, 3-ю и т.д. строки, умноженные соответственно на b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} и т.д. На пересечении i-й строки нижнего пояса и j-го столбца окажется число

$$a_{1j}b_{i1} + a_{2j}b_{i2} + \ldots + a_{nj}b_{in} \ .$$

Записывая последнее выражение иначе:

$$b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \ldots + b_{in}a_{nj} \ ,$$

увидим, что в третьем квадранте стоит матрица (BA):

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & -1 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & -1 \\
\hline
 & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & \multicolumn{2}{c}{B \cdot A} & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right| =$$

$$= (-1)^n \det(B \cdot A) \det(-E_n) = (-1)^n \det(B \cdot A)(-1)^n = \det(B \cdot A) \ .$$

Нами доказано соотношение

$$\det(B \cdot A) = \det A \cdot \det B \ ,$$

которое эквивалентно доказываемому.

6.5 Применение элементарных преобразований к произвольной матрице над числовым полем $\mathbb{F}$

6.5.1 Введение

Ранее мы видели, что некоторые преобразования расширенной матрицы линейной системы, сильно видоизменяя саму систему уравнений, не изменяли решений исходной системы (и всех промежуточных систем).

Элементарные преобразования можно не только применять в практике решения систем линейных алгебраических уравнений, но и положить в основу теории матриц, что и будет систематически предпринято в наших лекциях.

Рассмотрим последовательность элементарных упрощающих преобразований произвольной матрицы с элементами из поля $\mathbb{F}$.

В применении к решению системы уравнений этот процесс называется алгоритмом (методом) Гаусса.

Элементарные преобразования разобъем на три класса (ступени).

6.5.2 Упрощение 1-й ступени

Рассматриваем произвольную прямоугольную матрицу: $A_{m\times n},\ m \lesseqgtr n$.

- Если все столбцы нулевые, т.е. все $a_{ij} = 0$, то считаем, что матрица уже упрощена (хотя и не содержит ни одного столбца единичной матрицы).

- Просматриваем столбцы слева направо и находим **первый ненулевой столбец**, его номер s_1, $1 \le s_1 \le n$.

- В столбце s_1 находим какой-нибудь ненулевой (при реализации численных алгоритмов лучше наибольший по модулю) элемент $a_{k_1 s_1}$ (он находится в k_1-й строке, $1 \le k_1 \le m$) и делим k_1-ю строку на число $a_{k_1 s_1}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & * & * & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 1_{k_1 s_1} & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & * & * & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

- Оставляя k_1-ю строку неизменной прибавляем к каждой i-й строке ($i \ne k_1$) k_1-ю строку, умноженную на $(-a_{is_1})$, и таким образом добиваемся того, что все элементы s_1-го столбца, кроме $1_{k_1 s_1}$, становятся равными нулю:

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 1_{k_1 s_1} & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & * & * \end{bmatrix}.$$

- Если все столбцы правее s_1 не имеют ненулевых элементов вне строки k_1, то матрица упрощена.

- Просматривая столбцы правее s_1, находим первый, имеющий ненулевой элемент вне k_1-й строки. Это столбец s_2.

- В столбце s_2 находим ненулевой элемент вне k_1-й строки. Найденный элемент $a_{k_2 s_2}$ находится в строке k_2.

- Делим k_2-ю строку на число $a_{k_2 s_2}$.

- Оставляя k_2-ю строку неизменной, прибавляем к каждой i-й строке k_2-ю строку, умноженную на $(-a_{is_2})$. Теперь над и под единственной единицей s_2-го столбца будут стоять нули:

$$\begin{bmatrix}
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1_{k_2 s_2} & * & * & * & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\
0 & \dots & 0 & 1_{k_1 s_1} & * & * & 0 & * & * & * & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & *
\end{bmatrix}.$$

- Если все столбцы правее s_2 не имеют ненулевых элементов вне строк s_1 и s_2, то матрица упрощена.

- Просматривая столбцы правее s_2, находим первый столбец, имеющий ненулевой элемент вне k_1-й и k_2-й строк. Это столбец s_3.

- В столбце s_3 находим ненулевой элемент вне k_1-й и k_2-й строк. Найденный элемент $a_{k_3 s_3}$ находится в строке k_3.

- Делим k_3-ю строку на число $a_{k_3 s_3}$.

- Оставляя k_3-ю строку неизменной, прибавляем к каждой i-й строке k_3-ю строку, умноженную на $(-a_{is_3})$. Теперь над и под единственной единицей s_3-го столбца будут стоять нули:

$$\begin{bmatrix}
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1_{k_2 s_2} & * & * & 0 & * & * & * & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1_{k_3 s_3} & * & * & * & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\
0 & \dots & 0 & 1_{k_1 s_1} & * & * & 0 & * & * & 0 & * & * & * & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & *
\end{bmatrix}.$$

- Если все столбцы правее s_3 не имеют ненулевых элементов вне строк s_1 , s_2 и s_3 , то матрица упрощена.

- Просматривая столбцы правее s_3, находим первый столбец, имеющий ненулевой элемент вне k_1-й, k_2-й и k_3-й строк. Это столбец s_4 .

- В столбце s_4 находим ненулевой элемент вне k_1-й, k_2-й и k_3-й строк. Найденный элемент $a_{k_4 s_4}$ находится в строке k_4 .

- Делим k_4-ю строку на число $a_{k_4 s_4}$.

- Оставляя k_4-ю строку неизменной, прибавляем к каждой i-й строке k_4-ю строку, умноженную на $(-a_{i s_4})$. Теперь над и под единственной единицей s_4-го столбца будут стоять нули:

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1_{k_2 s_2} & * & * & 0 & * & * & 0 & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1_{k_3 s_3} & * & * & 0 & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\
0 & 0 & 1_{k_1 s_1} & * & * & 0 & * & * & 0 & * & * & 0 & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1_{k_4 s_4} & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & *
\end{bmatrix}.$$

- После шага $\le \min\{m, n\}$ процесс упрощения завершится (матрица будет максимально упрощена):

$$
\left[\begin{array}{c|cccccccccccccccccc}
 & 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
 & 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
k_2 & 0&0&0&0&0&1&\ast&\ast&0&\ast&\ast&0&\ast&\ast&0&\ast&\ast&\ast\\
 & 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
 & 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
k_3 & 0&0&0&0&0&0&0&0&1&\ast&\ast&0&\ast&\ast&0&\ast&\ast&\ast\\
 & 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
k_1 & 0&0&1&\ast&\ast&0&\ast&\ast&0&\ast&\ast&0&\ast&\ast&0&\ast&\ast&\ast\\
k_4 & 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&\ast&\ast&0&\ast&\ast&\ast\\
 & 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
 & 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
k_T & 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&\ast&\ast&\ast\\
 & 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
 & 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\hline
 & & &s_1& & &s_2& & &s_3& & &s_4& & &s_T& & &
\end{array}\right].
$$

Справа от столбца s_T вне строк $k_1, k_2, k_3, k_4, \ldots, k_T$ будут стоять только нули.

6.5.3 Упрощение 2-й ступени

Переставим строки следующим образом:

$$k_i\text{-ю на } i\text{-е (строковое место)},$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots, T.$$

$$
\begin{bmatrix}
0&0&1&\ast&\ast&0&\ast&\ast&0&\ast&\ast&0&\ast&\ast&0&\ast&\ast&\ast&\ast&\ast\\
0&0&0&0&0&1&\ast&\ast&0&\ast&\ast&0&\ast&\ast&0&\ast&\ast&\ast&\ast&\ast\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&\ast&\ast&0&\ast&\ast&0&\ast&\ast&\ast&\ast&\ast\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&\ast&\ast&0&\ast&\ast&\ast&\ast&\ast\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&\ast&\ast&\ast&\ast&\ast\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}.
$$

6.5.4 Упрощение 3-й ступени (перестановки столбцов)

Переставим столбцы следующим образом:

- s_1-й на 1-е (столбцовое) место;
- s_2-й на 2-е (столбцовое) место;
- s_3-й на 3-е (столбцовое) место;
- s_4-й на 4-е (столбцовое) место;

....

- s_T-й на Т-е (столбцовое) место.

Теперь матрица будет выглядеть так:

$$\left[\begin{array}{cccccc|ccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1_{T\times T} & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0_{m\times T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0_{m\times n}
\end{array}\right].$$

6.5.5 Примеры упрощения матрицы

Пример упрощения 1-й ступени.

Упростим конкретную матрицу размера 5×11 :

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}.$$

- Просматриваем столбцы слева направо и находим **первый ненулевой столбец**, его номер 3.

- В столбце 3 находим ненулевой (наибольший по модулю) элемент $a_{33} = 2$ и делим 3-ю строку на число 2:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Оставляя 3-ю строку неизменной, прибавляем к 1-й и ко 2-й строкам 3-ю строку, умноженную на (-1), и таким образом добиваемся того, что все элементы 3-го столбца, кроме 1_{33}, равны нулю:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Просматривая столбцы правее 3-го, находим первый имеющий ненулевой элемент вне 3-й строки. Это столбец 6-й.

- В 6-м столбце находим ненулевой элемент вне 3-й строки. Найденный элемент a_{46} находится в 4-й строке.

- Делим 4-ю строку на число $a_{46} = 1$.

- Оставляя 4-ю строку неизменной, прибавляем к 1-й строке 4-ю строку, умноженную на (-1). Теперь над и под единственной единицей 6-го столбца будут стоять нули:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Просматривая столбцы правее 6-го, находим первый столбец, имеющий ненулевой элемент вне 3-й и 4-й строк. Это 10-й столбец.

- В 10-м столбце находим ненулевой элемент вне 3-й и 4-й строк. Найденный элемент $a_{2\,10}$ находится во 2-й строке.

- Делим 2-ю строку на число $a_{2\,10} = 1$.

- Оставляя 2-ю строку неизменной, прибавляем к 3-й строке 2-ю строку, умноженную на (-2), а к пятой строке прибавляем 2-ю, умноженную на (-1). Теперь над и под единственной единицей 10-го столбца будут стоять нули:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как в столбце правее 10-го нет ненулевых элементов вне 3-й, 4-й и 2-й строк, упрощение 1-й ступени закончено.

Пример упрощения 2-й ступени.
Переставим строки:

- 3-ю на 1-е (строковое) место;
- 4-ю на 2-е (строковое) место;
- 2-ю на 3-е (строковое) место.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пример упрощения 3-ей ступени. Переставим столбцы:

- 3-й на 1-е (столбцовое) место;
- 6-й на 2-е (столбцовое) место;
- 10-й на 3-е (столбцовое) место.

Теперь матрица будет выглядеть так:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

6.6 Применение элементарных преобразований для анализа и решения линейных систем уравнений (метод Гаусса) (теоретический аспект)

Рассмотрим вновь систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \qquad m \leq\geq n$$

с расширенной матрицей

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Мы помним, что решение системы уравнений не меняется при эквивалентных преобразованиях системы:

- умножение левой и правой частей некоторого уравнения на ненулевой множитель;
- прибавление к некоторому уравнению другого уравнения;
- перестановка местами двух уравнений;
- прибавление к некоторому уравнению другого уравнения, умноженного предварительно на произвольный множитель.

Между эквивалентными преобразованиями системы линейных уравнений и строковыми элементарными преобразованиями расширенной матрицы системы существует взаимно однозначное соответствие.

Перестановка же столбцов основной матрицы фактически эквивалентна перенумерации искомых неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Выполним алгоритм Гаусса:

- Сделаем упрощение расширенной матрицы **первой и второй** ступеней — это не изменит решений системы.
- Сделаем упрощение **третьей** ступени, не задевающее столбца свободных членов — это лишь перенумерует искомые неизвестные.

После полного упрощения расширенная матрица может иметь один из следующих трех (и более никаких) видов:

1. Система разрешима и имеет бесконечно много решений:

$$\left[\begin{array}{c|cccc|ccc|c}
 & 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{1T+1} & \dots & a_{1n} & \tilde{b}_1 \\
 & 0 & 1 & \dots & 0 & \tilde{a}_{2T+1} & \dots & a_{2n} & \tilde{b}_2 \\
 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
T & 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{a}_{TT+1} & \dots & a_{Tn} & \tilde{b}_T \\
\hline
 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\hline
 & & & & T & & & n &
\end{array}\right] \qquad T < n, \quad T \le m.$$

2. Система разрешима и имеет единственное решение:

$$\left[\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_1 \\
 & 0 & 1 & \dots & 0 & \tilde{b}_2 \\
 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\
T = n & 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{b}_T \\
\hline
 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\hline
 & & & & n &
\end{array}\right] \qquad T = n, \quad T \le m.$$

3. Система неразрешима (не имеет решений):

$$\left[\begin{array}{c|cccc|ccc|c}
 & 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{1T+1} & \dots & a_{1n} & \tilde{b}_1 \\
 & 0 & 1 & \dots & 0 & \tilde{a}_{2T+1} & \dots & a_{2n} & \tilde{b}_2 \\
 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
T & 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{a}_{TT+1} & \dots & a_{Tn} & \tilde{b}_T \\
\hline
 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\
 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\
m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\
\hline
 & & & & T & & & n &
\end{array}\right] \qquad \begin{array}{c} T \le n, \quad T < m \\ \text{столбец} \\ \begin{bmatrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} \ne \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \text{(ненулевой)} \end{array}.$$

6.6.1 Примеры анализа и решения систем методом элементарных преобразований

Система имеет бесконечно много решений. Пусть нужно проанализировать и решить систему

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 5x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 7\,. \end{array}\right.$$

Перейдем к расширенной матрице системы:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 3 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -6 & -2 & -8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & -6 & -2 & -8 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Алгоритм Гаусса завершен; перейдем от расширенной матрицы к системе, эквивалентной исходной:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & + & 2/3x_3 & = & 5/3 \\ & & x_2 & + & 1/3x_3 & = & 4/3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & 5/3 - 2/3x_3 \\ x_2 & = & 4/3 - 1/3x_3 \\ x_3 & \in & \mathbb{F} \quad \text{(любое число)}. \end{array}\right.$$

Можно записать и так:

$$\left\{\begin{array}{lcrcr} x_1 & = & 5/3 & - & 2/3x_3 \\ x_2 & = & 4/3 & - & 1/3x_3 \\ x_3 & = & 0 & + & 1x_3 \end{array}\right. , \quad x_3 \in \mathbb{F}.$$

Окончательная и наиболее выразительная запись решения системы оформляется в виде матричного равенства

$$\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 5/3 \\ 4/3 \\ 0 \end{array}\right] + \alpha \left[\begin{array}{c} -2/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{array}\right], \qquad \alpha \in \mathbb{F}.$$

Система имеет единственное решение. Пусть нужно проанализировать и решить систему

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & - & 1x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & 1x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 7\,. \end{array}\right.$$

Перейдем к расширенной матрице системы:

$$
\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].
$$

Алгоритм Гаусса завершен; перейдем от расширенной матрицы к системе, эквивалентной исходной:

$$
\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases} \text{— система имеет единственное решение.}
$$

Решение можно записать в виде матричного равенства

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

Система не имеет решений. Пусть нужно проанализировать и решить систему

$$
\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - 1x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 1x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0\,. \end{cases}
$$

Перейдем к расширенной матрице системы:

$$
\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right] \sim
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right].
$$

Алгоритм Гаусса завершен; перейдем от расширенной матрицы к системе, эквивалентной исходной:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ 0 = 11 \end{cases} \text{— система не имеет решений.}$$

6.6.2 Решение систем после упрощения

Возвращаясь к теории, можно сказать, что в случае, когда система имеет единственное решение, столбец свободных членов, полученный после упрощения, и является матрицей-столбцом решения:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{bmatrix}.$$

В случае, когда система имеет бесконечно много решений, при условии, что столбцы единичной матрицы сосредоточены слева (переменные перенумерованы), все решения записываются так:

$$x_i = \tilde{b}_i - (\tilde{a}_{iT+1}x_{T+1} + \tilde{a}_{iT+2}x_{T+2} + \cdots + \tilde{a}_{in}x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, T.$$

Это же решение в векторной форме:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_T \end{bmatrix} - x_{T+1} \begin{bmatrix} \tilde{a}_{1T+1} \\ \tilde{a}_{2T+1} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{TT+1} \end{bmatrix} - \ldots - x_n \begin{bmatrix} \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{2n} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{Tn} \end{bmatrix},$$

$$x_{T+1}, \ldots, x_n \in \mathbb{F} \text{ (произвольные числа рассматриваемого поля).}$$

Искомые переменные играют в решении различную роль:

- параметрические переменные $x_{T+1}, \ldots, x_n$ независимо друг от друга могут принимать значения из основного поля $\mathbb{F}$;
- базисные переменные $x_1, x_2, \ldots, x_T$ однозначно выражаются через параметрические переменные.

Понятно, что базисные переменные имеют номера $1, 2, \ldots, T$ только после перенумерации (после перестановки столбцов), а до перенумерации они имели какие-то первоначальные номера $j_1, j_2, \ldots, j_T$.

Последнее матричное соотношение можно записать и так:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_T \\ x_{T+1} \\ x_{T+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_T \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - x_{T+1} \begin{bmatrix} \tilde{a}_{1T+1} \\ \tilde{a}_{2T+1} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{TT+1} \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - x_{T+2} \begin{bmatrix} \tilde{a}_{1T+2} \\ \tilde{a}_{2T+2} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{TT+2} \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \ldots - x_n \begin{bmatrix} \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{2n} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{Tn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} .$$

В более выразительной форме:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_T \\ x_{T+1} \\ x_{T+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_T \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{a}}_{1T+1} \\ \tilde{\tilde{a}}_{2T+1} \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{a}}_{TT+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{a}}_{1T+2} \\ \tilde{\tilde{a}}_{2T+2} \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{a}}_{TT+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_{n-T} \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{a}}_{1n} \\ \tilde{\tilde{a}}_{2n} \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{a}}_{Tn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Если система была однородной, т.е. $\vec{b} = \vec{0}$, то

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_T \\ x_{T+1} \\ x_{T+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{a}}_{1T+1} \\ \tilde{\tilde{a}}_{2T+1} \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{a}}_{TT+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{a}}_{1T+2} \\ \tilde{\tilde{a}}_{2T+2} \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{a}}_{TT+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_{n-T} \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{a}}_{1n} \\ \tilde{\tilde{a}}_{2n} \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{a}}_{Tn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} .$$

В последних формулах $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-T} \in \mathbb{F}$.

Матрицы-столбцы

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{a}}_{1T+1} \\ \tilde{\tilde{a}}_{2T+1} \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{a}}_{TT+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{a}}_{1T+2} \\ \tilde{\tilde{a}}_{2T+2} \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{a}}_{TT+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \vec{x}_{n-T} = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{a}}_{1n} \\ \tilde{\tilde{a}}_{2n} \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{a}}_{Tn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

называются фундаментальными решениями исходной системы уравнений, а их совокупность — фундаментальной системой решений исходной системы уравнений.

Матрицу-столбец

$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_T \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

будем называть опорным решением исходной системы уравнений.

Все решения исходной системы линейных уравнений даются простой структурной формулой

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \dots + \alpha_{n-T}\vec{x}_{n-T}, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-T} \in \mathbb{F}\,.$$

Полезно последнюю формулу выразить словами. Результатом такого выражения будет следующая теорема.

Теорема. Общее решение линейной системы алгебраических уравнений с числовыми коэффициентами из поля $\mathbb{F}$ есть сумма какого-нибудь частного решения этой системы (опорного решения) и линейной комбинации фундаментальных решений соответствующей однородной системы с параметрическими коэффициентами, могущими независимо друг от друга принимать значения из поля $\mathbb{F}$.

7 ЛЗ и ЛНЗ; ранг

7.1 ЛЗ и ЛНЗ матриц-столбцов (строк)

Все, что далее говорится о столбцах, в равной степени относится и к строкам.

7.1.1 Линейная зависимость

Столбцы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$, составленные из элементов поля $\mathbb{F}$, называются линейно зависимыми (ЛЗ), если для некоторого ненулевого набора чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ (хоть одно из этих чисел отлично от нуля) линейная комбинация

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

7.1.2 Линейная независимость

Столбцы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$, составленные из элементов поля $\mathbb{F}$, называются линейно независимыми (ЛНЗ), если из равенства

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}$$

сразу следует, что набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ нулевой, т.е. что

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

7.1.3 Важнейшие свойства ЛЗ и ЛНЗ

1. Набор из одного нулевого столбца уже ЛЗ, т.к.

$$1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad\qquad 1 \cdot \vec{0} = \vec{0},$$

   а набор чисел, состоящий из одного числа 1, ненулевой.

2. Набор из одного ненулевого столбца всегда ЛНЗ. Действительно,

$$\text{если} \quad \alpha\vec{a} = \vec{0}, \text{ то} \qquad \alpha a_i = 0 \ \&\ a_i \neq 0 \Longrightarrow \alpha = 0.$$

3. Набор столбцов, содержащий нулевой вектор-столбец, всегда ЛЗ. Действительно,
$$1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{a}_k = \vec{0},$$
хотя набор чисел $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ и ненулевой.

4. Если к ЛЗ набору столбцов $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k)$ добавить еще один столбец $\vec{a}_{k+1}$, то полученный набор $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k, \vec{a}_{k+1})$ вновь ЛЗ.

   Действительно, если существует какой-нибудь ненулевой набор чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, такой, что $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}$, то для очевидно ненулевого набора чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, 0)$ линейная комбинация $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k + 0\vec{a}_{k+1} = \vec{0}$.

5. Если из ЛНЗ набора столбцов $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m)$ изъять один столбец, то оставшиеся столбцы по-прежнему будут ЛНЗ.

   Действительно, предположив противное и возвратив изъятый столбец «на свое место», получим, согласно предыдущей теореме, ЛЗ набор векторов, что противоречит исходному предположению.

6. В множестве $\mathbb{F}^n$ столбцов высоты n с элементами из поля $\mathbb{F}$ существует n ЛНЗ столбцов
$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Действительно, составим линейную комбинацию описанных столбцов с произвольными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

   При покомпонентном рассмотрении равенства
$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$$
   получим
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0,$$
   что и доказывает ЛНЗ.

7. Любые $n+1$ столбцов из $\mathbb{F}^n$ ЛЗ.
   Доказательство см. несколько ниже, в пункте 7.2.

7.1.4 Критерий ЛЗ

Набор столбцов

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \, \ldots, \, \vec{a}_k \in \mathbb{F}^n$$

ЛЗ тогда и только тогда, когда один из них есть линейная комбинация остальных.

Доказательство достаточности. Пусть столбец с номером s есть линейная комбинация остальных, т.е.

$$\vec{a}_s = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_{s-1}\vec{a}_{s-1} + \alpha_{s+1}\vec{a}_{s+1} + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k,$$

тогда

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_{s-1}\vec{a}_{s-1} + (-1)\vec{a}_s + \alpha_{s+1}\vec{a}_{s+1} + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0},$$

но набор чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \, \ldots, \, \alpha_{s-1}, -1, \alpha_{s+1}, \, \ldots, \, \alpha_k)$ явно ненулевой.

Доказательство необходимости. Пусть набор столбцов ЛЗ, т.е.

$$\begin{cases} \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0} \\ \exists \quad \alpha_s \neq 0 \end{cases},$$

тогда

$$\vec{a}_s = -\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\vec{a}_1 - \ldots - \frac{\alpha_{s-1}}{\alpha_s}\vec{a}_{s-1} - \frac{\alpha_{s+1}}{\alpha_s}\vec{a}_{s+1} - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_s}\vec{a}_k.$$

7.2 Инвариантность ЛЗ – ЛНЗ

Пусть столбец $\vec{b}$ есть линейная комбинация столбцов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \, \ldots, \, \vec{a}_k$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \, \ldots, \, \alpha_k$, т.е.

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{b}, \tag{$*$}$$

или в поэлементной записи

$$\begin{cases} \alpha_1 a_{i1} + \alpha_2 a_{i2} + \ldots + \alpha_k a_{ik} = b_i \\ \qquad i = 1, 2, \, \ldots, \, n. \end{cases} \tag{$**$}$$

Столбцы можно собрать в матрицу

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} & b_n \end{array}\right].$$

Если в матрице проводить элементарные строчечные преобразования, то ее столбцы

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k, \vec{b}$$

будут меняться и превратятся в столбцы

$$\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \ldots, \vec{a}'_k, \vec{b}',$$

но линейная связь $(*)$ сохранится с теми же коэффициентами (это и есть инвариантность ЛЗ – ЛНЗ):

$$\vec{\alpha}_1\vec{a}'_1 + \vec{\alpha}_2\vec{a}'_2 + \ldots + \vec{\alpha}_k\vec{a}'_k = \vec{b}'. \qquad (*')$$

Действительно:

- Перестановка строк не меняет по сути системы $(**)$.
- Умножение одной из строк на $\lambda \neq 0$ не меняет по сути системы $(**)$.
- Прибавление к i-й строке j-й строки, умноженной на произвольный множитель $\lambda \neq 0$, дает

  $$(\alpha_1 a_{i1} + \alpha_1\lambda a_{j1}) + (\alpha_2 a_{i2} + \alpha_2\lambda a_{j2}) + \ldots + (\alpha_k a_{ik} + \alpha_k\lambda a_{jk}) = (b_i + \lambda b_j)$$

  и не меняет по сути системы $(**)$.

С помощью элементарных преобразований можно не только установить ЛЗ – ЛНЗ набора столбцов, но в случае ЛЗ выяснить, какие столбцы могут быть записаны в виде линейной комбинации остальных и с какими коэффициентами.

Для подтверждения сказанного обратимся к уже рассмотренному вопросу упрощения матрицы 1-й и 2-й ступеней.

Все столбцы выражаются через столбцы с номерами $s_1, s_2, \ldots, s_T$.

Пример. Исследовать набор столбцов заданной матрицы на ЛЗ – ЛНЗ:

$$\begin{array}{cccc} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 4 & -1 & 15 & 5 \\ 2 & 0 & 8 & 4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & -13 & -13 & -39 \\ 0 & -6 & -6 & -18 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & -6 & -18 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ответ:

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2 \text{ — ЛНЗ}, \qquad \vec{a}_3 = 4\vec{a}_1 + 1\vec{a}_2, \quad \vec{a}_4 = 2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2.$$

7.3 Ранги матрицы A

7.3.1 Столбцовый ранг матрицы $A_{n\times k}$

Столбцовый ранг матрицы $A_{n\times k}$ — это максимальное число ЛНЗ столбцов матрицы $A_{n\times k}$.

Элементарные строчечные преобразования не меняют столбцовый ранг (см. п. 7.2), поэтому столбцовый ранг эффективно вычисляется с помощью алгоритма Гаусса.

Число T в упрощенном виде 2-й ступени — это и есть столбцовый ранг матрицы.

7.3.2 Строковый ранг матрицы $A_{n\times k}$

Строковый ранг матрицы $A_{n\times k}$ — это максимальное число ЛНЗ строк матрицы $A_{n\times k}$.

Понятно, что столбцовые преобразования не изменяют строковый ранг. Но (как это ни странно) и строковые преобразования не меняют строкового ранга.

Доказательство. Пусть векторы-строки (индекс $\top$ опущен) собраны в матрицу

$$\begin{array}{cc} \vec{a}_1 & : \\ \vec{a}_2 & : \\ \vec{a}_3 & : \\ \dots & \\ \vec{a}_m & : \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

- Перестановка двух строк не меняет числа ЛЗ – ЛНЗ строк нашего набора. Это понятно.

- Умножение некоторой строки на ненулевой множитель $\lambda \in \mathbb{F}$ не уменьшает числа ЛЗ строк нашего набора.

  Действительно, если существует ненулевой набор чисел

  $$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}, \alpha_s),$$

  такой, что

  $$\alpha_1 \cdot \vec{a}_{i_1} + \alpha_2 \cdot \vec{a}_{i_2} + \dots + \alpha_{s-1} \cdot \vec{a}_{i_{s-1}} + \alpha_s \cdot \vec{a}_{i_s} = \vec{0},$$

  то существует ненулевой набор чисел

  $$(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{s-1}, \alpha'_s = \lambda^{-1}\alpha_s),$$

такой, что

$$\alpha_1 \cdot \vec{a}_{i_1} + \alpha_2 \cdot \vec{a}_{i_2} + \ldots + \alpha_{s-1} \cdot \vec{a}_{i_{s-1}} + \alpha_s \cdot (\lambda \vec{a}_{i_s}) = \vec{0}.$$

Рассуждением от противного получаем, что умножение некоторой строки на ненулевой множитель $\lambda \in \mathbb{F}$ не увеличивает числа ЛЗ строк нашего набора.

Соединение двух предыдущих предложений дает: умножение некоторой строки на ненулевой множитель $\lambda \in \mathbb{F}$ не изменяет количества ЛЗ – ЛНЗ строк нашего набора.

- Прибавление к k-й строке j-й строки не меняет ЛЗ – ЛНЗ строк. Действительно, пусть набор строк

$$\begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_k \\ \vdots \\ \vec{a}_j \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{bmatrix} \quad \text{ЛНЗ, т.е.}$$

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \ldots + \lambda_k \vec{a}_k + \ldots + \lambda_j \vec{a}_j + \ldots + \lambda_m \vec{a}_m = \vec{0} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0.$$

Тогда

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha_k(\vec{a}_k + \vec{a}_j) + \ldots + \alpha_j \vec{a}_j + \ldots + \alpha_m \vec{a}_m =$$
$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{a}_k + \ldots + (\alpha_j + \alpha_k)\vec{a}_j + \ldots + \alpha_m \vec{a}_m = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = \ldots = (\alpha_j + \alpha_k) = \ldots = \alpha_m = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = \ldots = \alpha_j = \ldots = \alpha_m = 0,$$

$$\text{т.е. и набор строк} \quad \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_k + \vec{a}_j \\ \vdots \\ \vec{a}_j \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{bmatrix} \quad \text{ЛНЗ.}$$

- Прибавление к k-й строке j-й строки не уменьшает числа ЛНЗ строк нашего набора. Не ограничивая общности, можно считать, что все ЛНЗ строки имеют номера от 1 до T, а их линейные комбинации — от $(T+1)$ до $m > T$;

  $$\left.\begin{array}{l}\vec{a}_1\\ \vdots\\ \vec{a}_T\end{array}\right\}\qquad \text{ЛНЗ строки;}$$

  $$\left.\begin{array}{l}\vec{a}_{T+1}\\ \vdots\\ \vec{a}_m\end{array}\right]\qquad \text{комбинации ЛНЗ строк.}$$

  Возможны четыре случая:

  1. Строка из блока] прибавляется к строке блока] — ясно.
  2. Строка из блока } прибавляется к строке блока] — ясно.
  3. Строка из блока } прибавляется к строке блока } — доказано выше.
  4. Строка с номером j из блока] прибавляется к строке с номером T блока } — в этом случае возможны два подслучая:
     (a) число ЛНЗ строк блока } сохраняется — ясно;
     (b) число ЛНЗ строк блока } уменьшается на 1, это самый кропотливый случай, который мы и рассмотрим.

Если предположить, что строки

$$\left.\begin{array}{c}\vec{a}_1\\ \vec{a}_2\\ \vdots\\ \vec{a}_{T-1}\\ \vec{a}_T+\vec{a}_j\end{array}\right\}\ \text{ЛЗ},\qquad \left.\begin{array}{c}\vec{a}_1\\ \vec{a}_2\\ \vdots\\ \vec{a}_{T-1}\\ \vec{a}_j\end{array}\right\}\ \text{ЛЗ}$$

(если здесь ЛНЗ, то нечего уже и доказывать), то получится, что строки

$$\left.\begin{array}{c}\vec{a}_1\\ \vec{a}_2\\ \vdots\\ \vec{a}_{T-1}\\ \vec{a}_T\end{array}\right\}\ \text{ЛЗ},$$

что неверно. Таким образом, требуемое утверждение доказано.

- Рассуждением от противного получаем, что прибавление к k-й строке j-й строки не увеличивает числа ЛНЗ строк нашего набора.

  Соединение двух предыдущих предложений дает: прибавление к k-й строке j-й строки не изменяет числа ЛЗ – ЛНЗ строк нашего набора.

7.3.3 Равенство столбцового и строкового рангов матрицы

Если рассматривать упрощенный вид 3-й ступени любой матрицы, то можно увидеть, что строковый ранг и столбцовый ранг упрощенной матрицы равны одному и тому же числу T. Но элементарные преобразования не меняют числа ЛЗ – ЛНЗ строк и столбцов матрицы, следовательно, столбцовый и строковый ранги матрицы совпадают.

7.3.4 Минорный ранг матрицы $A_{n\times k}$

Минорный ранг матрицы — это наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы.

Каждый из отличных от нуля миноров этого наивысшего порядка называется базисным минором.

Теорема об инвариантности минорного ранга. При строковых (и столбцовых) элементарных преобразованиях минорный ранг матрицы не меняется (хотя, конечно, сама матрица меняется «до неузнаваемости»).

Редукция теоремы. При строковых элементарных преобразованиях ранг матрицы **не может понизиться**.

Доказательство.

- Если элементарное преобразование не изменяет строк базисного минора, то доказательство завершается тривиально.

- Если одна из строк базисного минора умножается на ненулевой множитель, то его невырожденность сохраняется.

- Если к строке базисного минора прибавляется иная строка этого минора, то сам минор не меняется (и, следовательно, остается невырожденным).

- Пусть теперь к строке базисного минора прибавляется небазисная строка; если бы эта строка не была линейной комбинацией базисных строк, то это бы значило, что существует отличный от нуля минор более высокого порядка, но это не так, и поэтому к строке базисного минора прибавляется линейная комбинация его строк;

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} BM \\ \neq 0 \end{matrix} & \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ \hline & \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ & \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \cdots \ \vec{a}_s \\ \\ \cdots \ \vec{a}_k = \sum_{i=1}^{T} \alpha_i \vec{a}_i, \quad \alpha_s = 0 \ \vee \ \alpha_s \neq 0 \\ \end{matrix} .$$

Если $\alpha_s = 0,$ то фактически к s-й строке базисного минора BM прибавляется линейная комбинация других его строк, поэтому его значение не изменяется; если $\alpha_s \neq 0,$ то рассмотрим другой минор $BM',$ поменяв местами строки $\vec{a}_s$ и $\vec{a}_k$;

$$BM' = \alpha_s \cdot BM \neq 0,$$

т.е. минорный ранг матрицы не понизился.

7.3.5 Ранг матрицы

Рассмотрим упрощенный вид матрицы 1-й ступени (строки не перемещались). Базисный минор расположен в строках

$$k_1, k_2, \ldots, k_T$$

и в столбцах

$$s_1, s_2, \ldots, s_T;$$

таким образом, минорный ранг матрицы равен $T,$ поэтому значения всех трех рангов совпадают.

Определение. Рангом матрицы называется общее значение строкового, столбцового и минорного рангов. Обозначается ранг символом $\operatorname{rang} A.$ Он удовлетворяет очевидному двойному неравенству

$$0 \leq \operatorname{rang} A_{m\times n} \leq \min\{m, n\}.$$

7.4 Вычисление ранга матрицы

7.4.1 Вычисление ранга матрицы методом Гаусса

Теория изложена выше.

Простые задачи. Вычислить устно ранги матриц.

1. $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = 0.$ $\qquad \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = 1.$

2. $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 5 & 7 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = 1.$ $\qquad \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 5 & 7 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = 2.$

3. $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & 7 & \dots & 0 \\ 5 & 7 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = 2.$ $\qquad \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & 7 & \dots & 0 \\ 5 & 7 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = 3.$

4. $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = 1.$ $\qquad \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = 1.$

5. $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & \dots & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = 2.$ $\qquad \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & \dots & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 7 & \dots & 0 \end{bmatrix} = 3.$

6. $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 7 & 4 & 5 & \dots & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = 2.$ $\qquad \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 7 & 4 & 5 & \dots & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 7 & \dots & 0 \end{bmatrix} = 3.$

7. $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & \dots & 0 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = 2.$ $\qquad \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & \dots & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 7 & 7 & 7 & \dots & 0 \end{bmatrix} = 3.$

7.4.2 Метод окаймляющих миноров

Этот метод можно применять тогда, когда про ранг заранее известно, что он маленький. Метод основан на следующей теореме.

Теорема. Если для некоторого ненулевого минора порядка T все его окаймляющие миноры (они имеют порядки $(T+1)$) равны 0, то $\operatorname{rang} A = T$ (и поэтому **все** миноры порядка $(T+1)$ равны 0).

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что рассматриваемый минор находится в верхнем левом углу матрицы.

$$\begin{array}{c|cccc|c|c|c|}
 & & & & T & & j & n \\ \hline
T & \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vdots & \vec{a}_T & & \vec{a}_j & \\ \hline
 & & & & & & & \\ \hline
i & a_{i1} & a_{i2} & & a_{iT} & & a_{ij} & \\ \hline
m & & & & & & & \\ \hline
 & \vec{A}_1 & \vec{A}_2 & \vdots & \vec{A}_T & & \vec{A}_J &
\end{array} .$$

В приведенной схеме:

- столбцы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_T, \vec{a}_j$ имеют высоту T;
- столбцы $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_T, \vec{A}_j$ имеют высоту m.

Окаймляющий минор

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \ldots & \vec{a}_T & \vec{a}_j \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{iT} & a_{ij} \end{vmatrix} = 0,$$

поэтому его столбцы ЛЗ, и последний столбец есть линейная комбинация предшествующих:

$$\begin{bmatrix} \vec{a}_j \\ a_{ij} \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ a_{i1} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} \vec{a}_2 \\ a_{i2} \end{bmatrix} + \cdots + \alpha_T \begin{bmatrix} \vec{a}_T \\ a_{iT} \end{bmatrix} .$$

Последнее соотношение распадается на два:

$$\begin{cases} \vec{a}_j = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_T \vec{a}_T & \Longrightarrow \text{коэффициенты единственны,} \\ \\ a_{ij} = \alpha_1 a_{i1} + \alpha_2 a_{i2} + \ldots + \alpha_T a_{iT} & \text{(равенство не зависит от } i > T\text{),} \end{cases}$$

поэтому для всех столбцов исходной матрицы

$$\vec{A}_j = \alpha_1 \vec{A}_1 + \alpha_2 \vec{A}_2 + \ldots + \alpha_T \vec{A}_T,$$

т.е. в матрице A только T ЛНЗ столбцов $\Longrightarrow \operatorname{rang} A = T$.

7.5 Применение ранга матрицы к анализу разрешимости матричных уравнений (теорема Кронекера – Капелли)

7.5.1 Применение к матричному уравнению (искомая матрица находится справа)

Пусть нужно проанализировать и решить матричное уравнение

$$A_{m\times n}\cdot X_{n\times k}=B_{m\times k}.$$

Для этого составим расширенную матрицу задачи:

$$[A_{m\times n}|B_{m\times k}]_{m\times(n+k)}\ ,$$

проведем элементарные строчечные преобразования и, если нужно, перестановку столбцов левого блока. Перед нами будет упрощенная матрица задачи

$$\left[\begin{array}{c|c||c} E_{T\times T} & M_{T\times(n-T)} & M_{T\times k} \\ \hline O_{(m-T)\times(T)} & O_{(m-T)\times(n-T)} & K_{(m-T)\times(k)} \end{array}\right]\ .$$

Уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда

$$K_{(m-T)\times(k)}=O_{(m-T)\times(k)},$$

а для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rang} A=\operatorname{rang}[\,A\,|\,B\,].$$

7.5.2 Применение к СЛАУ

Система линейных уравнений эквивалентна матричному уравнению

$$A\vec{x}=\vec{b}.$$

Это матричное уравнение разрешимо (система совместна) тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rang} A=\operatorname{rang}[\,A\,|\,\vec{b}\,],$$

т.е. **ранг основной матрицы системы совпадает с рангом расширенной матрицы** (это так называемая теорема Кронекера – Капелли).

7.5.3 Применение к матричному уравнению (искомая матрица находится слева)

Пусть нужно проанализировать и решить систему

$$Y_{k\times m} \cdot A_{m\times n} = C_{k\times n}.$$

Протранспонировав исходное соотношение, получим матричное уравнение с неизвестной правой матрицей

$$A^{\top}_{n\times m} \cdot Y^{\top}_{m\times k} = C^{\top}_{n\times k},$$

которое разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rang} A^{\top} = \operatorname{rang}\left[A^{\top} \,|\, C^{\top} \right],$$

или в более выразительной форме

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\left[\frac{A}{C}\right].$$

8 Обращение матриц

8.1 Правая и левая обратные матрицы и нахождение их методом Гаусса

8.1.1 Правая обратная матрица

Определение. Правой обратной матрицей матрицы A будем называть любое решение уравнения $A_{m\times n} \cdot X_{n\times m} = E_m$. Будем обозначать правую обратную матрицу A^{-1r}.

Алгоритм. Для нахождения A^{-1r} достаточно решить соответствующее матричное уравнение, применив метод Гаусса к расширенной матрице

$$[\, A_{m\times n} \,|\, E_m \,];$$

при этом может быть реализован один из трех случаев:

- A^{-1r} может не существовать;
- A^{-1r} может существовать, но быть не единственной;
- A^{-1r} может существовать и быть единственной.

Примеры. Проанализировать матрицы на обратимость справа.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$;

$$\left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -19/2 & 7/2 & 1 \end{array}\right].$$

Матрица A^{-1r} не существует.

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$;

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7/2 & 1 & -1/2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & 19/2 & -2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -7/2 & 1 & -1/2 \end{array}\right].$$

Существует бесконечно много правых обратных. Найдем их.

Вот первый и второй столбцы искомой матрицы (искомых матриц — ведь их бесконечно много):

$$x_{11} = -2 - \tfrac{19}{2}x_{31}\,, \qquad x_{12} = \tfrac{3}{2} - \tfrac{19}{2}x_{32}\,,$$

$$x_{21} = 1 + \tfrac{7}{2}x_{31}\,, \qquad x_{22} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{7}{2}x_{32}\,,$$

$$x_{31} = 0 + 1x_{31}\,, \qquad x_{32} = 0 + 1x_{32}\,,$$

$$A^{-1r} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{19}{2}x_{31} & -\frac{19}{2}x_{32} \\ \frac{7}{2}x_{31} & \frac{7}{2}x_{32} \\ 1x_{31} & 1x_{32} \end{bmatrix},$$

$$A^{-1r} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{19}{2}t & -\frac{19}{2}s \\ \frac{7}{2}t & \frac{7}{2}s \\ 1t & 1s \end{bmatrix}, \qquad t, s \in \mathbb{F},$$

$$A^{-1r}=\begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{19}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \; [t \;\; s], \qquad t,s\in\mathbb{F}.$$

3. $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$;

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right].$$

$$A^{-1r}=\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{— единственная правая обратная матрица.}$$

Критерий существования правой обратной матрицы. Для существования правой обратной матрицы для матрицы $A_{m\times n}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rang} A_{m\times n} = \operatorname{rang}\left[\, A_{m\times n} \mid E_m \,\right] = m = \text{число строк.}$$

Критерий существования единственной правой обратной матрицы. Для существования единственной правой обратной матрицы для матрицы $A_{m\times n}$ НиД, чтобы

$$\operatorname{rang} A_{m\times n} = m = n \text{ (матрица квадратная)} \Longleftrightarrow \det A \neq 0.$$

8.1.2 Левая обратная матрица

Определение. Левой обратной матрицей для матрицы A будем называть решение уравнения $X_{n\times m}\cdot A_{m\times n} = E_n$. Будем обозначать левую обратную матрицу A^{-1l}.

Алгоритм. Для нахождения A^{-1l} достаточно транспонировать исходное и решить полученное матричное уравнение, применив метод Гаусса, и затем протранспонировать полученное решение:

$$A^{-1l} = \left((A^{\top})^{-1r}\right)^{\top}.$$

Критерий существования. Для существования левой обратной матрицы для матрицы $A_{m\times n}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rang} A_{m\times n} = n = \text{число столбцов}.$$

Критерий единственности. Для существования единственной левой обратной матрицы для матрицы $A_{m\times n}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rang} A_{m\times n} = n = m \quad \text{(матрица квадратная)} \Longleftrightarrow \det A \neq 0.$$

8.2 Обратная матрица и нахождение ее методом Гаусса

8.2.1 Определение обратной матрицы

Пусть фиксирована матрица A с коэффициентами из поля $\mathbb{F}$; следующие высказывания о матрицах A, A^{-1l} и A^{-1r} эквивалентны между собой:

1. $\det A \neq 0$.
2. $\begin{cases} A \text{ есть квадратная матрица порядка } n. \\ \operatorname{rang} A = n. \end{cases}$
3. $\begin{cases} \text{Существует} \quad A^{-1l}. \\ \text{Существует} \quad A^{-1r}. \end{cases}$
4. Существует единственная A^{-1l}.
5. Существует единственная A^{-1r}.
6. $\begin{cases} \text{Существует [единственная]} \quad A^{-1l}. \\ \text{Существует [единственная]} \quad A^{-1r}. \end{cases}$
7. $\begin{cases} \text{Существует [единственная]} \quad A^{-1l}. \\ \text{Существует [единственная]} \quad A^{-1r}. \\ A^{-1r} = A^{-1l}. \end{cases}$

Фактического доказательства требует только импликация $6 \Longrightarrow 7$. Вот требуемая цепочка равенств:

$$A^{-1l} = A^{-1l} \cdot E = A^{-1l} \cdot (A \cdot A^{-1r}) = (A^{-1l} \cdot A) \cdot A^{-1r} = E \cdot A^{-1r} = A^{-1r}.$$

Определение. Обратной матрицей матрицы A будем называть общее значение левой и правой обратных матриц квадратной матрицы A; будем обозначать обратную матрицу A^{-1}.

К написанным критериям добавляются теперь еще следующие:

8. Существует обратная матрица A^{-1}.

9. Существует единственная обратная матрица A^{-1}.

Запомним основные равенства

$$A \cdot A^{-1} = E,$$
$$A^{-1} \cdot A = E.$$

Подтверждается простыми алгебраико-матричными вычислениями следующая теорема.

Теорема. Если обратная матрица существует, то она единственна.

Доказательство.

$$AX = E \quad \Rightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}E \quad \Rightarrow \quad EX = A^{-1} \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}.$$

8.2.2 Свойство операции обращения

Теорема. Если матрицы n-го порядка A и B обратимы, то обратимо и их произведение $A \cdot B$, при этом

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Доказательство. Так как A и B одного порядка, то их произведение $(A \cdot B)$ существует и будет квадратной матрицей того же порядка.

Так как A и B обратимы, они невырождены; следовательно, их произведение невырождено и поэтому обратимо, т.е. существует матрица $(A \cdot B)^{-1}$. С другой стороны, не вызывает сомнений следующая цепочка равенств:

$$(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A \cdot (BB^{-1}) \cdot A^{-1} = AA^{-1} = E.$$

В силу единственности обратной матрицы получаем требуемое.

8.2.3 Детерминант обратной матрицы

Используя теорему о детерминанте произведения двух матриц, можно получить выразительную формулу детерминанта обратной матрицы:

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}.$$

8.2.4 Вычисление A^{-1} методом Гаусса

Для нахождения A^{-1} нужно решить матричное уравнение $A \cdot X = E$, а для этого достаточно упростить матрицу $[\,A\,|\,E\,]$ до матрицы $[\,E\,|\,A^{-1}]$.

Пример. Для матрицы $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ найти обратную A^{-1}.

Решение. Составим расширенную матрицу задачи и упростим ее, применяя элементарные преобразования 1-й и 2-й ступеней:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Ответ. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Проверка. $A \cdot A^{-1} = E$.

8.2.5 Об обобщении понятия обратимости

Имеется замечательное обобщение понятия обратной матрицы — «псевдообратная матрица».

Псевдообратная матрица единственным образом определяется для произвольной числовой матрицы независимо от ее ранга.

Доступное и достаточно подробное изложение теории псевдообратных матриц можно найти в пособии [13] из списка литературы.

8.3 Выражение элементов обратной матрицы через миноры исходной матрицы

Запишем матричное соотношение $AX = E$ в развернутой форме:

$$A \cdot [\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \dots\ \vec{x}_n] = [\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \dots\ \vec{e}_n];$$

в «постолбцовой» форме:

$$A \cdot \vec{x}_j = \vec{e}_j, \qquad j = 1, 2, \dots, n;$$

и в покоординатной форме:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \dots \\ x_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \; j\text{-я строка} \qquad \det A \neq 0.$$

К каждой системе (их n штук) можно применить метод Крамера:

$$x_{ij} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & 1_{ji} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{(-1)^{j+i} \det A_{ji}}{\det A} \, .$$

Полученную формулу можно применять при ручном счете при $n = 2, 3, 4,$ а при машинном счете для тех порядков, при которых необходимые детерминанты считаются в допустимое вычислительной задачей время.

Именно формулы Крамера позволяют организовать программы точного счета (с рациональными результатами) для систем с целыми коэффициентами.

В связи с полученной формулой уместно следующее определение.

Определение. Матрица A^c, состоящая из алгебраических дополнений элементов матрицы $A^\top$, называется **присоединенной (взаимной)** для матрицы A:

$$A^c = (a^c_{ij})_{n\times n} = ((-1)^{i+j} \det A_{ji})_{n\times n}.$$

Используя обратную матрицу, можно лаконично записать формулу, связывающую присоединенную матрицу с исходной:

$$A^c = (\det A) A^{-1}.$$

Из последней формулы видно, что для квадратной матрицы A n-го порядка

$$\det A^c = (\det A)^{n-1}.$$

8.4 Элементарные преобразования матрицы как матричные умножения

Упрощения матриц, которые базировались на элементарных преобразованиях, являются существенной частью матричного исчисления и могут быть представлены как умножения исходной матрицы на матрицы специального вида.

Строчечные преобразования получаются умножением исходной матрицы на элементарные матрицы **слева**.

Столбцовые преобразования получаются умножением исходной матрицы на элементарные матрицы **справа**.

При записи специальных матриц будем считать, что все явно не указанные элементы совпадают с одноименными элементами единичной матрицы того же порядка.

8.4.1 Матрица $E_m(k;\lambda)$

Умножение k-й строки на множитель λ.

$$\begin{array}{cc}
\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \\ \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1_{mm}
\end{bmatrix} \\
 & \begin{matrix} & & & & k & & & \phantom{1_{mm}} \end{matrix}
\end{array}
\cdot
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\lambda a_{k1} & \lambda a_{k2} & \dots & \lambda a_{kn} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
\end{bmatrix}.$$

Правило. Умножение k-й строки матрицы на множитель λ эквивалентно умножению слева на элементарную матрицу, полученную из единичной умножением k-й строки на множитель λ.

Умножение k-го столбца на множитель λ.

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1m} \\
a_{21} & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2m} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n1} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nm}
\end{bmatrix}
\cdot
\left[\begin{array}{c|cccccccc}
 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\
 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
k & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda & 0 & \ldots & 0 \\
 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1_{mm} \\
\hline
 & & & & & k & & &
\end{array}\right]
=
$$

$$
=
\begin{bmatrix}
a_{11} & \ldots & \lambda a_{1k} & \ldots & a_{1m} \\
a_{21} & \ldots & \lambda a_{2k} & \ldots & a_{2m} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n1} & \ldots & \lambda a_{nk} & \ldots & a_{nm}
\end{bmatrix}.
$$

Правило. Умножение k-го столбца на множитель λ эквивалентно умножению справа на элементарную матрицу, полученную из единичной умножением k-го столбца на множитель λ.

8.4.2 Матрица $E_m(i \leftrightarrow j)$

Перестановка i-й и j-й строк (перестановка i-го и j-го столбцов).

$$
\left[\begin{array}{c|ccccccccccc}
 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\
 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
i & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
 & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\
 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
j & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\
 & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
m & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\
\hline
 & & & & i & & & & j & & & m
\end{array}\right]
\times
$$

$$\times \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ m \end{array} \begin{bmatrix} * & * & * & \dots & * \\ * & * & * & \dots & * \\ * & * & * & \dots & * \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ * & * & * & \dots & * \\ * & * & * & \dots & * \\ * & * & * & \dots & * \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \\ * & * & * & \dots & * \\ * & * & * & \dots & * \\ * & * & * & \dots & * \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ m \end{array} \begin{bmatrix} * & * & * & \dots & * \\ * & * & * & \dots & * \\ * & * & * & \dots & * \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \\ * & * & * & \dots & * \\ * & * & * & \dots & * \\ * & * & * & \dots & * \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ * & * & * & \dots & * \\ * & * & * & \dots & * \\ * & * & * & \dots & * \end{bmatrix}.$$

Правило. Перестановка i-й и j-й строк эквивалентна умножению слева на матрицу, полученную из единичной перестановкой i-й и j-й строк.

Правило. Перестановка i-го и j-го столбцов эквивалентна умножению справа на матрицу, полученную из единичной перестановкой i-го и j-го столбцов.

8.4.3 Матрица $E_m\binom{i\ \ i+j}{j}$

Прибавление к i-й строке j-й строки (прибавление к j-му столбцу i-го столбца).

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ m \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \times \\ & \begin{array}{ccccccccccc} & & & i & & & & j & & & m \end{array} \end{array}$$

$$\times \left[\begin{array}{c|ccccc}
 & * & * & * & \dots & * \\
 & * & * & * & \dots & * \\
 & * & * & * & \dots & * \\
i & a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\
 & * & * & * & \dots & * \\
 & * & * & * & \dots & * \\
 & * & * & * & \dots & * \\
j & a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \\
 & * & * & * & \dots & * \\
 & * & * & * & \dots & * \\
m & * & * & * & \dots & *
\end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccccc}
 & * & * & * & \dots & * \\
 & * & * & * & \dots & * \\
 & * & * & * & \dots & * \\
i & a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & a_{i3}+a_{j3} & \dots & a_{in}+a_{jn} \\
 & * & * & * & \dots & * \\
 & * & * & * & \dots & * \\
 & * & * & * & \dots & * \\
j & a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \\
 & * & * & * & \dots & * \\
 & * & * & * & \dots & * \\
m & * & * & * & \dots & *
\end{array}\right].$$

Правило. Прибавление к i-й строке j-й строки эквивалентно умножению слева на матрицу, полученную из единичной прибавлением к i-й строке j-й строки; прибавление к j-му столбцу i-го столбца эквивалентно умножению справа на матрицу, полученную из единичной прибавлением к j-му столбцу i-го столбца.

8.4.4 Диагональная матрица

Умножение каждой строки (столбца) на свой множитель λ_i.

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix}.$$

Правило. Умножение каждой строки (столбца) на свой множитель эквивалентно умножению слева (справа) на диагональную матрицу.

8.4.5 Перестановочная матрица $E\binom{1\ 2\ \cdots m}{i_1\, i_2 \cdots i_m}$

Перестановка строк (столбцов), задаваемая подстановкой

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix},$$

(на k-е строковое (столбцовое) место ставится i_k-я строка (столбец)), эквивалентна умножению слева на матрицу, полученную из единичной с помощью той же перестановки (это результат следующего пункта).

Замечание. Достаточно полная и подробная теория подстановок и перестановок будет излагаться во втором семестре нашего курса.

8.4.6 Элементарные преобразования матриц как матричные умножения

Строчечные преобразования. Если матрица $\tilde{A}$ получается из матрицы A с помощью некоторой последовательности элементарных строчечных преобразований, то, записывая эти преобразования в виде умножений на матрицы $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$, получим

$$\tilde{A} = \sigma_k \sigma_{k-1} \dots \sigma_2 \sigma_1 A = (\sigma_k \sigma_{k-1} \dots \sigma_2 \sigma_1 E)A,$$

т.е. матрица $\tilde{A}$ получается умножением матрицы A слева на матрицу $(\sigma_k \sigma_{k-1} \dots \sigma_2 \sigma_1 E)$, полученную из единичной матрицы E с помощью той же последовательности элементарных строчечных преобразований.

Столбцовые преобразования. Если матрица $\tilde{A}$ получается из матрицы A с помощью некоторой последовательности элементарных столбцовых преобразований, то, записывая эти преобразования в виде умножений на матрицы $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$, получим

$$\tilde{A} = A\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{k-1} \sigma_k = A(E\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{k-1} \sigma_k),$$

т.е. матрица $\tilde{A}$ получается умножением матрицы A справа на матрицу $(E\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{k-1} \sigma_k)$, полученную из единичной матрицы E с помощью той же последовательности элементарных столбцовых преобразований.

9 Полная проблема собственных значений

9.1 Собственные числа и собственные векторы квадратной матрицы

9.1.1 Постановка задачи

Пусть фиксировано поле $\mathbb{F}$ $(\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{C})$. Для квадратной матрицы A с элементами из поля $\mathbb{F}$ найти все ненулевые векторы (векторы-столбцы) $\vec{x} \in \mathbb{F}^n \setminus \{\vec{0}\}$, такие, что

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad \text{для некоторого } \lambda \in \mathbb{F}. \tag{$*$}$$

Те значения λ, для которых выполняется соотношение $(*)$, называются **собственными числами** квадратной матрицы A (из поля $\mathbb{F}$).

Те ненулевые векторы $\vec{x}$, для которых выполнено $(*)$, называются **собственными векторами** квадратной матрицы A, соответствующими собственному значению λ.

Соотношение $(*)$ заменяет (для собственных векторов) очевидным образом матричное умножение умножением на собственное число.

9.1.2 Характеристическое уравнение

Чтобы найти собственные числа и собственные векторы, запишем соотношение $(*)$ в матричной форме:

$$A \cdot \vec{x} = \lambda E \cdot \vec{x}; \qquad (A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{0}. \tag{$**$}$$

Теперь перед нами однородная система n уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Если $\det(A - \lambda E) \neq 0$, то $(**)$ имеет единственное решение $\vec{x} = \vec{0}$ (по формуле Крамера). Поэтому собственные векторы (а они обязательно ненулевые) можно найти только в том случае, когда

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{$***$}$$

Это так называемое характеристическое уравнение, а его левая часть — это характеристический полином квадратной матрицы A.

Вот развернутая форма характеристического уравнения для $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & (a_{33} - \lambda) \end{vmatrix} = 0\,.$$

Если разложим $\det(A-\lambda E)$ и приведем подобные члены, то действительно получим полином n-й степени

$$(-1)^n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 \,.$$

Решая в поле $\mathbb{F}$ характеристическое уравнение

$$(-1)^n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = 0,$$

найдем собственные числа (из поля $\mathbb{F}$).

Пример. Найти собственные числа матрицы $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Для решения составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} (2-\lambda) & -1 & 2 \\ 5 & (-3-\lambda) & 3 \\ -1 & 0 & (-2\lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

раскроем определитель и упростим

$$-\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0, \qquad (\lambda+1)^3 = 0,$$

запишем ответ:

$$\lambda = -1, \quad \text{кратность=3.}$$

9.1.3 Бесконечность множества собственных векторов

Теорема. Если векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ являются собственными векторами, соответствующими собственному числу λ_0, то любая их ненулевая комбинация $\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{x}_i$ вновь является собственным вектором, соответствующим тому же собственному числу λ_0.

Доказательство. Если $\forall (i \in [1,k]) \quad A\vec{x}_i = \lambda_0 \vec{x}_i$, то

$$A\vec{x} = A\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A\vec{x}_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_0 \vec{x}_i = \lambda_0 \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{x}_i = \lambda_0 \cdot \vec{x}\,.$$

Правило. Для нахождения всех собственных векторов, соответствующих собственному числу λ_0, необходимо и достаточно найти лишь все ЛНЗ векторы, соответствующие собственному числу λ_0.

9.1.4 ЛНЗ собственных векторов

Теорема. Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ являются попарно различными собственными значениями матрицы A, если $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ — соответствующие им собственные векторы, то набор векторов $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k)$ будет ЛНЗ.

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}$, тогда

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0},\\
&\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{k-1} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Все эти k равенств можно записать в матричной форме

$$[\,\alpha_1\vec{x}_1 \;\; \alpha_2\vec{x}_2 \;\ldots\; \alpha_k\vec{x}_k\,]_{n\times k} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^{k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \lambda_k & \lambda_k^2 & \ldots & \lambda_k^{k-1} \end{bmatrix}_{k\times k} = [\vec{0}\;\vec{0}\;\ldots\;\vec{0}]_{n\times k}.$$

Квадратная матрица с определителем Вандермонда является невырожденной, поэтому

$$[\,\alpha_1\vec{x}_1 \;\; \alpha_2\vec{x}_2 \;\ldots\; \alpha_k\vec{x}_k\,]_{n\times k} = [\,\vec{0}\;\vec{0}\;\ldots\;\vec{0}]_{n\times k}$$

и, следовательно,

$$\alpha_1\vec{x}_1 = \alpha_2\vec{x}_2 = \ldots = \alpha_k\vec{x}_k = \vec{0},$$

но собственные векторы ненулевые, поэтому

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0,$$

а этот вывод из исходного предположения и означает, что векторы

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k \quad \text{ЛНЗ.}$$

Следствие. Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, не могут быть равными.

9.1.5 Нахождение собственных векторов

После того как найдено собственное число λ, можно находить соответствующие ему собственные векторы. Для этого достаточно решить систему $(*)$ методом Гаусса.

Так как $\mathrm{rang}(A - \lambda E) = r < n$, то $m = n - r \geq 1$ и

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix} + \ldots + t_m \begin{bmatrix} x_{1m} \\ x_{2m} \\ \vdots \\ x_{nm} \end{bmatrix} ,$$

или в более абстрактной форме

$$\vec{x} = t_1\vec{x}_1 + t_2\vec{x}_2 + \ldots + t_m\vec{x}_m \ .$$

Мы знаем, что число собственных векторов, соответствующих собственному числу λ, **бесконечно**, но нам важны ЛНЗ векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$, из которых может быть получен любой собственный вектор $\vec{x}$, соответствующий собственному числу λ.

9.1.6 Терминология

Следующие группы терминов синонимичны (см. книги [4, 6] из списка литературы):

$$\left.\begin{array}{l} \text{Собственный вектор матрицы } A. \\ \text{Характеристический вектор матрицы } A. \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Собственное значение матрицы } A. \\ \text{Характеристическое значение матрицы } A. \\ \text{Собственное число матрицы } A. \\ \text{Характеристический корень матрицы } A. \\ \text{Характеристическое число матрицы } A. \end{array}\right\}$$

9.1.7 Полная проблема собственных значений

Полная проблема собственных значений (ППСЗ) матрицы A — это задача отыскания всех собственных чисел матрицы A и всех собственных векторов, соответствующих этим числам.

Неформальный алгоритм решения ППСЗ состоит из следующей последовательности больших действий:

- Составить характеристический полином $|A - \lambda E|$.
- Решить характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$.

  В результате — **спектр матрицы**: $\begin{cases} \lambda_1 & \text{кратности } k_1, \\ \lambda_2 & \text{кратности } k_2, \\ \dots & \quad \dots \quad \dots \\ \lambda_s & \text{кратности } k_s. \end{cases}$
- Для каждого λ_ν решить систему уравнений $(A - \lambda_\nu E)\vec{x} = \vec{0}$ и перечислить ЛНЗ собственные векторы, принадлежащие собственному числу λ_ν .

Пример 1. Решить полную проблему собственных значений (найти все собственные числа и собственные векторы) для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Решение. Составим характеристическое уравнение матрицы.

$$\begin{vmatrix} (2-\lambda) & -1 & 1 \\ -1 & (2-\lambda) & -1 \\ 0 & 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \ ;$$

$$(1-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) = 0; \quad (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0 \ .$$

Найдем собственные числа матрицы A, записывая характеристическое уравнение в промежуточной более удобной форме:

$$(1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) = 0 \ .$$

Собственные числа матрицы A суть

$$\lambda_1 = 1 \text{ — кратность } 2 \ , \quad \lambda_2 = 3 \text{ — кратность } 1 \ .$$

Положим $\lambda = 1$.

Запишем соответствующую однородную систему и ее расширенную матрицу (без нулевого столбца свободных членов):

$$\begin{cases} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = 0 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = 0 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & +0 & x_3 & = 0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{rrr|} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] .$$

Упростим расширенную матрицу методом Гаусса:

$$\left[\begin{array}{rrr|} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Дешифруем матрицу:

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \,.$$

Решим это уравнение:

$$\left\{\begin{array}{lcrcr} x_1 & = & x_2 & - & x_3 \\ x_2 & = & x_2 & & \\ x_3 & = & & & x_3 \end{array}\right. \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вот окончательная запись решения:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{F} \,.$$

Вот ЛНЗ собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda = 1$:

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Положим $\lambda = 3$.

Запишем соответствующую однородную систему и ее расширенную матрицу (без нулевого столбца свободных членов):

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = 0 \\ -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = 0 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & -2 & x_3 & = 0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rrr|} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right].$$

Упростим расширенную матрицу методом Гаусса:

$$\left[\begin{array}{rrr|} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Дешифруем матрицу:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \,. \end{array}\right.$$

Решим эту систему:

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad t_1 \in \mathbb{F}.$$

Вот собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda = 3$:

$$\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ответ. Собственные числа и соответствующие им ЛНЗ собственные векторы суть

$$\lambda_1 = 1, \qquad \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\lambda_2 = 3, \qquad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Пример 2. (Рекомендуется прорешать самостоятельно.) Решить полную проблему собственных значений для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Краткое решение. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} (3-\lambda) & -1 & 1 \\ -1 & (95-\lambda) & -1 \\ 1 & -1 & (3-\lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

упростим его:

$$(3-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) = 0.$$

Найдем собственные числа и собственные векторы:

$$\lambda_1 = 2,\ \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \lambda_2 = 3,\ \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \lambda_3 = 6,\ \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

9.1.8 След квадратной матрицы

Сумма диагональных элементов называется **следом** матрицы A и обозначается символами $\operatorname{tr} A$ и(или) $\operatorname{sp} A$ (английское слово **trace**, немецкое слово **die Spur**):

$$\operatorname{tr} A = (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) \ .$$

Коэффициент характеристического полинома перед λ^{n-1} есть

$$c_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) \ .$$

Доказать это можно методом математической индукции по порядку матрицы n; для $n = 1, 2, 3$ — непосредственным вычислением.

Попутно заметим, что свободный член характеристического полинома $c_0 = \det A$. Действительно,

$$\det(A - \lambda E) \equiv (-1)^n \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0 \ , \quad \det A = c_0 \ .$$

Список литературы

1. Винберг, Э. Б. Курс алгебры / Э. Б. Винберг. — 3-е изд., исправл. и доп. — М. : Факториал Пресс, 2002. — 544 с.

2. Икрамов, Х. Д. Задачник по линейной алгебре / Х. Д. Икрамов ; под ред. В. В. Воеводина. — М. : Наука, 1975. — 320 с.

3. Кострикин, А. И. Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры : учебник для вузов / А. И. Кострикин. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 272 с.

4. Кострикин, А. И. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра : учебник для вузов / А. И. Кострикин. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 368 с.

5. Кострикин, А. И. Введение в алгебру. Часть 3. Основные алгебраические структуры : учебник для вузов / А. И. Кострикин. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 272 с.

6. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — 15-е изд. — М. : Лань, 2005. — 432 с.

7. Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. — М. : ЛБЗ, 2001. — 384 с.

8. Сборник задач по алгебре / под ред. А. И. Кострикина. — 3-е. изд., испр. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 464 с.

9. Тыртышников, Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра / Е. Е. Тыртышников. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 480 с.

10. Фаддеев, Д. К. Лекции по алгебре : учебное пособие для вузов / Д. К. Фаддеев. — 2-е изд., стер. — СПб. : Лань, 2002. — 416 с.

11. Фаддеев, Д. К. Сборник задач по высшей алгебре / И. С. Соминский, Д. К. Фаддеев. — 9-е изд. — М. : Наука, 1968. — 304 с.

12. Фаддеев, Д. К. Сборник задач по высшей алгебре / И. С. Соминский, Д. К. Фаддеев.— 11-е изд., пер. и доп. — М. : Наука, 1977. — 288 с.

13. Цупак, А. А. Псевдообратные матрицы / А. А. Цупак. — Пенза : Издательский центр ПензГУ, 2008. — 30 с.

14. Шафаревич, И. Р. Основные понятия алгебры / И. Р. Шафаревич. — Ижевск : НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001. — 352 с.

Учебно-теоретическое издание

Цупак Алексей Александрович
Цупак Александр Николаевич

ЛЕКЦИИ ПО АЛГЕБРЕ. I СЕМЕСТР. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. МАТРИЦЫ И ДЕТЕРМИНАНТЫ. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ

Редактор Ю. С. Жидкова
Технический редактор А. Г. Темникова
Набор и верстка авторов

Подписано в печать 26.08.08. Формат $60 \times 84/16$
Усл. печ. л. 6,97
Заказ 177. Тираж 100.

Информационно-издательский центр ПГУ
Пенза, Красная, 40, т.: 56-47-33